

# Von Boltzmann und Darwin zum Self Annealing – Strategien evolutionärer Optimierung

Helge Rosé

Institut für Physik, Humboldt Universität Berlin, Invalidenstr. 110, D-10115 Berlin, Germany

## 1 Einleitung

Die Idee, Optimierungsprobleme durch evolutionäre Prinzipien zu lösen, ist nicht neu, doch erst mit dem Eintritt in das Computerzeitalter begann ihre stürmische Entfaltung. Besonders stark entwickelten sich in den letzten zehn Jahren die zahlreiche Lösungsansätze, die wir heute unter den Begriff *Evolutionäre Algorithmen* zusammenfassen: Das Simulated Annealing [1], die Evolutionsstrategien (ES) [2], Genetic Algorithms (GA) [3], Evolutionary Programming (EP) [4] und Genetic Programming (GP) [5].

Die Vielfalt der Realisierungen Evolutionärer Algorithmen scheint auf den ersten Blick eine einheitliche Darstellung kaum zuzulassen. Alle diese Algorithmen besitzen jedoch zwei fundamentale Charakteristika, die die Dynamik ihrer Optimierung beschreiben. Betrachtet man diese Dynamik als eine Bewegung  $x(t)$  in einem Suchraum  $X$ , die alle globalen Optima einer Funktion  $F(x)$  auf  $X$  besuchen soll, so kann man feststellen:

Die Bewegung  $x(t)$  ist nicht deterministisch, sondern es werden zuerst *Möglichkeiten* des Fortschreitens erzeugt; die Entscheidung für eine von diesen erfolgt dann durch *Bewertung* an Hand von  $F(x)$ . Alle Evolutionären Algorithmen realisieren also die Prozesse der Möglichkeitserzeugung – die *Mutation* – und -bewertung – die *Selektion*. Sie sind damit als stochastische Algorithmen probabilistisch zu beschreiben.

Die vollständige probabilistische Kennzeichnung eines Systems ist durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(x)$  seines Zustandes  $x$  gegeben. Für ein Ensemble oder eine Population von Suchern charakterisiert  $P(x, t)$  die Dichte der Sucher im Zustand  $x$  zur Zeit  $t$  oder die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Suchers im Zeitverlauf. Ein und dieselbe Dynamik der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch unterschiedliche Algorithmen realisiert werden. Deshalb wollen wir die Klasse aller Evolutionären Algorithmen der gleichen Dynamik eine *Evolutionäre Strategie* nennen.

Unter einem Optimierungsproblem verstehen wir dabei die Bestimmung der Optima (Minima oder Maxima) einer reellwertige Funktion  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  – der *Fitness* – in einem

Suchraum  $X$ . Dieser kann diskret oder kontinuierlich sein, soll aber zur analytischen Darstellung des dynamischen Verhaltens als  $\mathbb{R}^n$  angenommen werden. Die Dynamik der Evolutionären Strategie ist dann durch eine Differentialgleichung darstellbar, die die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(x, t)$  mit  $x \in X$  beschreibt und deren Lösungen Eigenschaften und Verhalten der Strategie vollständig bestimmen.

## 2 Evolutionäre Strategien

### 2.1 Die Boltzmann Strategie

Als einfachste Variante einer Evolutionären Strategie wollen wir zunächst die Boltzmann Strategie betrachten. Sie wurde erstmals 1953 von METROPOLIS et al. [6] als Algorithmus zur Erzeugung Boltzmannverteilter Ensemble realisiert. KIRKPATRICK et al. [1] erweiterten 1983 den Metropolis Algorithmus zum *Simulated Annealing*, das in der Folgezeit zahlreiche Anwendung auf verschiedenste Optimierungsprobleme gefunden hat [7]. Der Metropolis Algorithmus ist gerade so konstruiert, daß als stationäre Verteilung die Boltzmannverteilung

$$P(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(x, t) \sim e^{-\beta F(x)}$$

angenommen wird und so wollen wir Algorithmen mit einem solchen Verhalten nach EBELING [8] *Boltzmann Strategien* nennen. Die Boltzmannverteilung besitzt gerade in den Minima der Fitness ihre Maxima, d.h. daß sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $P(x, t)$  eines Suchers immer mehr in den Optima (Minima) der Fitnessfunktion konzentriert. Die Einordnung dieser Strategie unter die Klasse der Evolutionären Strategien erscheint auf den ersten Blick nicht ganz gerechtfertigt, da ein solches Verhalten gerade dem thermodynamischer Systeme entspricht. Es konnte jedoch gezeigt werden [9], daß sowohl die Boltzmann Strategie als auch die von der biologischen Evolution motivierte Darwin Strategie durch ein und dieselbe Grundgleichung beschrieben werden können.

Der Metropolis Algorithmus realisiert die Boltzmann Strategie nur durch einen Sucher. Um einen Optimierungsschritt zu vollziehen, wird zunächst sein Zustand  $x$  im Suchraum  $X$  durch eine Mutation in einen neuen Zustand  $\acute{x}$  überführt. Die Bewertung dieser Mutation erfolgt an Hand der Fitnessdifferenz  $\Delta F = F(\acute{x}) - F(x)$  mit der Akzeptanzwahrscheinlichkeit

$$A(\acute{x}, x) = \begin{cases} 1 & : \Delta F \leq 0 \\ e^{-\beta \Delta F} & : \Delta F > 0 \end{cases}$$

Dies bedeutet, daß Mutationen, die zur Verbesserung der Fitness führen (Minimierung), immer vollzogen werden, verschlechternde Mutationen jedoch nur mit einer Wahrscheinlichkeit  $e^{-\beta \Delta F}$ . Der einzige Parameter des Algorithmus  $\beta$  bestimmt die Nichtakzeptanz der verschlechternden Mutationen. Er entspricht in Analogie zur statistischen Physik einer inversen Temperatur. Kleines  $\beta$  (hohe Temperatur) bewirkt eine hohe Akzeptanz – der Weg der Suche  $x(t)$  entspricht einer Zufallsbewegung. Hingegen

führt ein großes  $\beta$  (tiefe Temperatur) zu einer geringen Akzeptanz –  $x(t)$  beschreibt einen stochastischen Gradientenabstieg.

Dieses Verhalten kann auch im Bild der Brownschen Teilchen durch eine Langevin Gleichung beschrieben werden. Dazu nehmen wir an, daß die Mutationen durch Gaußsches weißes Rauschen realisiert sind. Der Boltzmann Strategie entspricht dann ein Gradientenabstieg, dem eine Brownsche Bewegung überlagert ist

$$\frac{d}{dt} x = -\beta D \partial_x F + \sqrt{2D} \xi(t), \quad (1)$$

mit  $\langle x \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t')$  und dem Diffusionskoeffizienten  $D$ , der die Stärke der Mutation beschreibt.

Die Langevin Gleichung beschreibt die stochastische Bewegung des Suchers im Suchraum. Die Dynamik der Boltzmann Strategie ist durch die korrespondierende Fokker-Planck Gleichung [10, 9], die die Entwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $P(x, t)$  des Suchers beschreibt, gegeben

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \beta D \partial_x (P \partial_x F) + D \partial_x^2 P. \quad (2)$$

Wie man leicht überprüfen kann, stellt die Boltzmannverteilung eine stationäre Lösung dieser Gleichung dar. Das allgemeine Lösungsverhalten und damit die dynamischen Eigenschaften der Boltzmann Strategie können mit Methoden der Operatortheorie untersucht werden, wie es im Beitrag von ASSELMAYER in diesem Band dargestellt wird.

## 2.2 Die Darwin Strategie

Die zweite wichtige und - im eigentlichen Sinne - evolutionäre Strategie ist die Darwin Strategie. Sie beschreibt als stark vereinfachtes Modell die prinzipielle Fähigkeit der biologischen Evolution zur optimierenden Entwicklung. Die seit DARWINS revolutionärer Arbeit ebenso enthusiastisch wie polemisch geführte Diskussion um die Bedeutung des Begriffes Fitness, des Zieles oder der Richtung der Evolution soll nicht Gegenstand unserer Betrachtung sein. Wir betrachten hier Evolution als einen irreversiblen Prozeß, der als Folge selbstorganisierter Sprünge fortschreitet [11]. Eine Fitness im Sinne eines in der Zeit monoton steigenden Maßes kann sicher nicht allgemein angenommen werden [12]. Es ist jedoch möglich, prinzipielle Eigenschaften spezieller evolutionärer Systeme in Modellen zu beschreiben [13]. Ein solches stellt das Fisher-Eigen Modell der Evolution einer einzelnen Spezies in einer festen Umgebung dar. Erstmals durch FISHER 1930 untersucht [14], wurde es von EIGEN als Standardmodell für Systeme mit Konkurrenz und Selektion formuliert [15].

Kennzeichnend für das Fisher-Eigen Modell ist eine fitnessproportionale Vermehrung der Individuen bei konstanter Populationsgröße [11]. Evolutionäre Strategien, die dies erfüllen, wollen wir mit EBELING *Darwin Strategien* nennen [8].

Alle biologisch motivierten Evolutionären Algorithmen wie ES, GA, EP oder GP [2, 16, 3, 17, 4, 5] realisieren exakt oder näherungsweise eine Darwin Strategie durch

ihre Selektionsschemata. Dennoch müssen wir bemerken, daß bei der Fülle der dazugehörigen Algorithmen keine präzise Klassifikation unter eine Strategie möglich ist. Nichtlineare Prozesse der Algorithmen wie Rekombination oder cross over werden von der linearen Darstellung der Darwin Strategie nicht erfaßt. Aus diesem Grunde werden wir hier einen einfachen Basisalgorithmus beschreiben, der eindeutig die Darwin Strategie realisiert.

Dazu betrachten wir ein Ensemble von Suchern im Suchraum  $X = \mathbb{R}$ . Die Bewertung der Mutationen erfolgt in der Darwin Strategie durch eine fitnessproportionale Vermehrung bei konstanter Ensemblegröße. Dies führt zu einem Selektionsprozeß in dessen Verlauf Sucher geringer Fitness durch solche hoher Fitness ersetzt werden. Die Konstanz der Ensemblegröße stellt für die Dichte der Sucher  $P(x, t)$  die Forderung der Normerhaltung dar

$$\int P(x, t) dx = \text{const. } \forall t.$$

Normieren wir auf Eins, so können wir  $P(x, t)$  als Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Suchers im Zustand  $x$  zur Zeit  $t$  interpretieren.

Als erstes interessieren wir uns nur für den Selektionsprozeß des die Darwin Strategie realisierenden Algorithmus. Wir wählen zufällig zwei Sucher  $x$  und  $y$  des Ensemble aus. Liegt die Fitness von  $x$  über der mittleren Fitness  $\langle F \rangle$  des Ensembles, verdoppelt sich  $x$  und ersetzt  $y$ . Liegt jedoch  $F(x)$  unterhalb, so stirbt  $x$  aus und  $y$  wird verdoppelt. Mit SCHIMANSKY-GEIER [18] können wir diese Selektion als Zweiteilchenreaktion des Paares  $(x, y)$  beschreiben, welches die Übergänge

$$(x, y) \begin{cases} \xrightarrow{|f(x)|} & (x, x) & : & f(x) > 0 \\ \xrightarrow{|f(x)|} & (y, y) & : & f(x) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

mit der fitnessproportionalen Rate

$$f(x) := (F(x) - \langle F \rangle), \quad \langle F \rangle := \int F(x) P(x) dx \quad (4)$$

ausführt. Diese Übergänge erhalten natürlich die Ensemblegröße. Andere Ansätze der Rate  $|f(x)|$ , mit der die Übergänge vollzogen werden, realisieren ebenfalls die Darwin Strategie, wie z.B.  $\Theta(F(x) - F(y)) (F(x) - F(y))$  [19]. Die Simulation des Algorithmus zeigt jedoch, daß mit  $|f(x)|$  schon bei kleinen Ensembles sehr gute Übereinstimmungen zu exakten Lösungen der Darwin Strategie erzielt werden können [20].

Um zur Fisher-Eigen Gleichung [11] zu gelangen, die die Selektionsdynamik der Darwin Strategie beschreibt, müssen wir die zeitliche Änderung von  $P(x, t)$  durch die Übergänge (3) bestimmen. Diese beschreibt die Mastergleichung [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) &= \int W(x, \acute{x}, y) P(\acute{x}, y) - W(\acute{x}, x, y) P(x, y) d\acute{x} \\ &+ \int W(y, \acute{y}, x) P(x, \acute{y}) - W(\acute{y}, y, x) P(x, y) d\acute{y}, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei wir die Zweiteilchenverteilung  $P(x, y, t)$  zu betrachten haben, da unser Selektionsschema eine Wechselwirkung zwischen zwei Suchern darstellt.

Die dem Selektionsprozeß (3) entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten

$$W(x, \acute{x}, y) := W((\acute{x}, y) \rightarrow (x, y)) = \delta(x - y) (|f(\acute{x})| \Theta(-f(\acute{x})) + f(y) \Theta(f(y))) \quad (6)$$

beschreiben die Wahrscheinlichkeit der Zustandsänderung  $(\acute{x}, y) \rightarrow (x, y)$ . Sie sind entsprechend (3) nur für  $x = y$  ungleich Null, wobei der erste Term das Verschwinden und der zweite die Verdoppelung eines Suchers erfaßt. Mit den nützlichen Abkürzungen und der Einteilchenverteilung  $P(x)$

$$A(x) := |f(x)| \Theta(-f(x)), \quad B(x) := f(x) \Theta(f(x)), \quad P(x) = \int P(x, y) dy \quad (7)$$

erhalten wir damit für (5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) &= \delta(x - y) \left( \int A(\acute{x}) P(\acute{x}, y) d\acute{x} + B(y) P(y) \right) - (A(x) + B(y)) P \\ &+ \delta(y - x) \left( \int A(\acute{y}) P(x, \acute{y}) d\acute{y} + B(x) P(x) \right) - (A(y) + B(x)) P. \end{aligned} \quad (8)$$

Diese Form der Gleichung beschreibt auch die Korrelationen zwischen zwei Suchern, die in der Einteilchendarstellung der Fisher-Eigen Gleichung nicht erfaßt werden. Um zur Dynamik der Einteilchenverteilung  $P(x, t)$  zu gelangen, machen wir die Näherung der Korrelationsfreiheit

$$P(x, y) = P(x) P(y), \quad (9)$$

und erhalten mit  $2A - |f| = -f$ ,  $2B - |f| = f$ ,  $\langle f \rangle = 0$  die Fisher-Eigen Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = (\langle 2A - |f| \rangle + 2B - |f|) P(x) = f P(x). \quad (10)$$

Diese entspricht dem Selektionsterm der Darwin Strategie. Die Mutation wollen wir ebenso wie in der Boltzmann Strategie als Gaussches weißes Rauschen realisieren, d.h durch eine Diffusionsbewegung der Sucher mit der Diffusionskonstante  $D$  als Mutationsstärke. Damit lautet die vollständige Dynamik der Darwin Strategie

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \gamma (F - \langle F \rangle) P + D \partial_x^2 P. \quad (11)$$

Die Gleichung ist normerhaltend und die Bewertung einer Mutation erfolgt durch Vergleich am Fitnessmittelwert der Population – im Gegensatz zum Gradientenabstieg der Boltzmann Strategie. Mutationen, die Fitnesswerte oberhalb des Mittelwertes erzeugen, werden als erfolgversprechend bewertet und führen zu einer Erhöhung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit in diesem Teil des Suchraumes. Daraus resultiert eine Bewegung der Population – hin zu den Maxima der Fitnessfunktion. Der Selektionsterm führt zur stetigen Steigerung der mittleren Fitness  $\partial_t \langle F \rangle \geq 0$ , wohingegen der Mutationsterm auch Verringerung zuläßt. Dies ermöglicht es der Strategie, lokale Maxima zu verlassen [9, 21].

### 3 Gemischte Strategien

Wie EBELING und ENGEL zeigten [9], ist das dynamische Verhalten der Boltzmann und der Darwin Strategie bis auf eine Transformation der Fitnessfunktion gleich – beide können in einheitlicher Form durch eine Schrödinger Gleichung beschrieben werden. Ihr Verhalten auf derselben Fitnesslandschaft ist jedoch verschieden: Die Boltzmann Strategie ist effizienter auf Landschaften schwacher Krümmung, wohingegen die Darwin Strategie schmale, tiefe Täler zu passieren vermag [21]. Beide Eigenschaften können in komplizierten Landschaften von Vorteil sein. Was liegt also näher als beide Strategien zu kombinieren: Diese Idee EBELINGS führt uns zu einer neuen Klasse von Strategien – den *gemischten Strategien*.

#### 3.1 Die Boltzmann-Darwin Strategie

Ihre einfachste Form stellt die Boltzmann-Darwin Strategie dar. Sie wird durch ein Ensemble von Boltzmannsuchern realisiert, die einer Fisher-Eigen Selektion unterzogen werden. Aus (2) und (11) ergibt sich sofort die Dynamik der *Boltzmann-Darwin Strategie* für ein Minimierungsproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \gamma (\langle F \rangle - F) P + \beta D \partial_x (P \partial_x F) + D \partial_x^2 P. \quad (12)$$

$\beta$  und  $\gamma$  parametrisieren eine ganze Schar von Strategien, die für  $\beta \rightarrow 0$  in die Darwin und für  $\gamma \rightarrow 0$  in die Boltzmann Strategie münden. Sowohl die analytische Untersuchung [21] als auch die Anwendung [22] belegen die Beschleunigung der Suche und die erhöhte Robustheit durch Mischung.

#### 3.2 Die Self Annealing Strategie

Die Idee des Simulated Annealing besteht in der schrittweisen Abkühlung der Temperatur ( $\beta \rightarrow \infty$ ) des Metropolis Algorithmus, um die Suche auf Gebiete schon recht guter Fitness zu konzentrieren. Bei zu schneller Abkühlung können jedoch lokale Minima in endlicher Zeit nicht verlassen werden, wohingegen bei zu langsamer Abkühlung keine Konzentration auf die Minima einsetzt. Dieses Problem der Wahl der geeigneten Abkühlung wurde von SALAMON und ANDRESEN im Rahmen thermodynamischer Überlegungen behandelt [23, 24]. Ein ebensolches Problem stellt sich in der Wahl einer geeigneten Mutationsstärke. In den Evolutionsstrategien wird auch sie im Laufe der Suche optimiert [16]. Diese evolutionäre Form der Anpassung von Steuerparametern bietet den Vorteil, daß alle Parameter durch ein einheitliches und einfaches Prinzip adaptiert werden können. Wenden wir dieses auf die Boltzmann-Darwin Strategie an, so erhalten wir in einfacher Weise ihre adaptive Erweiterung – die *Self Annealing Strategie*.

Dabei gehen wir ebenfalls von einem Ensemble von Boltzmannsuchern aus, nur jeder besitzt nun ein eigenes  $\beta$ , d.h.  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . In einem Schritt des Algorithmus wird nun die Selektion für  $x$  mit der Rate  $\gamma$  und die für  $\beta_x$  mit der Rate  $\kappa$  für beide

an Hand von  $f(x) = \langle F \rangle - F(x)$  vollzogen. Damit ergeben sich die Übergänge

$$(x, \beta_x, y, \beta_y) \begin{cases} \xrightarrow{\gamma |f(x)|} (x, \beta_x, x, \beta_y) & : f(x) > 0 \\ \xrightarrow{\gamma |f(x)|} (y, \beta_x, y, \beta_y) & : f(x) < 0 \\ \xrightarrow{\kappa |f(x)|} (x, \beta_x, y, \beta_x) & : f(x) > 0 \\ \xrightarrow{\kappa |f(x)|} (x, \beta_y, y, \beta_y) & : f(x) < 0 \\ \xrightarrow{\gamma \kappa f^2(x)} (x, \beta_x, x, \beta_x) & : f(x) > 0 \\ \xrightarrow{\gamma \kappa f^2(x)} (y, \beta_y, y, \beta_y) & : f(x) < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Die ersten beiden entsprechen alleiniger  $x$ -Selektion analog zu (3), die nächsten alleiniger  $\beta_x$ -Selektion und die letzten der Selektion von  $x$  und  $\beta_x$  gemeinsam in einem Schritt. In der Mastergleichung ergibt sich für die reine  $x$ -Selektion natürlich wieder (10) und da die Rate der reinen  $\beta_x$ -Selektion  $\kappa |f(x)|$  nicht von  $\beta_x$  abhängt, heben sich diese Übergänge einfach auf. Allein die letzten beiden Übergänge steuern die Anpassung der  $\beta$ , für sie erhalten wir mit (7),  $u := (x, \beta_x)$  und

$$W(u, \acute{u}, v) := W((\acute{u}, v) \rightarrow (u, v)) = \gamma \kappa \delta(u - v) (A(\acute{u} + B(v)))^2 \quad (14)$$

aus (5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(u, v, t) &= \delta(u - v) \left( \int (A^2(\acute{u}) + 2 A(\acute{u}) B(v)) P(\acute{u}, v) d\acute{u} + B^2(v) P(v) \right) \\ &\quad - (A^2(u) + 2 A(u) B(v) + B^2(v)) P(u, v) \\ &+ \delta(v - u) \left( \int (A^2(\acute{v}) + 2 A(\acute{v}) B(u)) P(\acute{v}, u) d\acute{v} + B^2(u) P(u) \right) \\ &\quad - (A^2(v) + 2 A(v) B(u) + B^2(u)) P(u, v), \end{aligned} \quad (15)$$

und mit (9),  $B - A = f$ ,  $A + B = |f|$ ,  $B^2 - A^2 = f |f|$ , den zusätzlichen Selektionsterm

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(u, t) &= (\langle A^2 - B^2 + 2 A B(u) - 2 A(u) B \rangle + B^2(u) - A^2(u)) P(u) \\ &= \gamma \kappa (f(u) |f(u)| + f(u) (\langle |f| \rangle - \langle f |f| \rangle)) P(u). \end{aligned} \quad (16)$$

Damit ergibt sich die Dynamik der Self Annealing Strategie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, \beta, t) &= \gamma f P + \gamma \kappa (f |f| + f (\langle |f| \rangle - \langle f |f| \rangle)) P \\ &+ \beta D \partial_x (P \partial_x f) + D \partial_x^2 P + D_\beta \partial_\beta^2 P. \end{aligned} \quad (17)$$

Die Anpassung von  $\beta$  steuern die Selektionsrate  $\kappa$  und die Mutationsstärke  $D_\beta$ . Die Self Annealing Strategie umfaßt alle drei oben behandelten Strategien und erweitert diese durch die Steuerung von  $\beta$ .

Die Frage ist nun: Besitzt die Strategie das gewünschte Verhalten der Selbst-abkühlung der Temperatur  $T = 1/\beta$  in den Fitnessoptima? Um dies zu zeigen, wählen

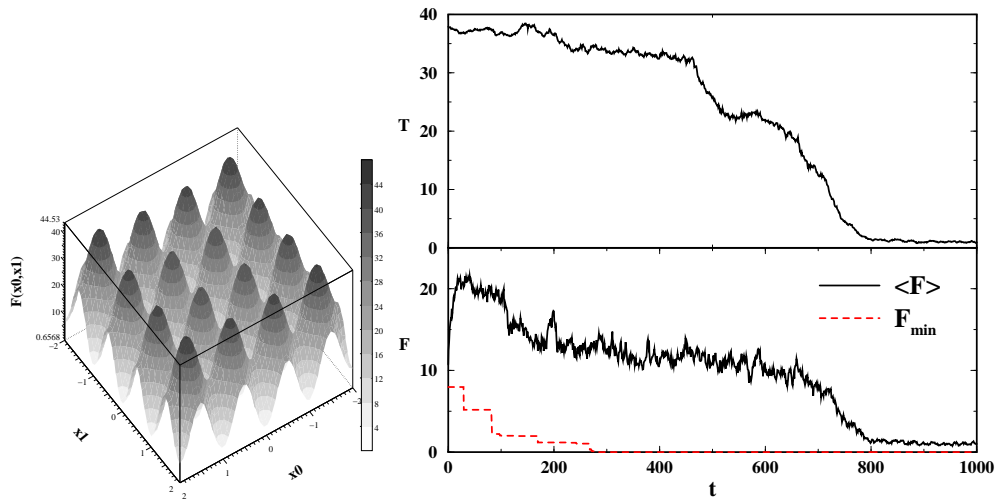


Abbildung 1: Minimierung der 2d-Rastriginfunktion (links) durch den Self Annealing Algorithmus mit 50 Suchern. Rechts: Die Entwicklung der mittleren Fitness  $\langle F \rangle$ , mittleren Temperatur  $T$  und des Besten  $F_{\min}$  für 1000 Optimierungsschritte.

wir die recht schwierige Rastriginfunktion als Fitness. Abb. 1 zeigt die Optimierung einer zweidimensionalen Rastriginfunktion durch den Self Annealing Algorithmus. Die Fitnessfunktion (links) besitzt in  $x = (0, 0)$  ihr globales Minimum  $F = 0$ . Rechts ist die Entwicklung der mittleren Fitness und der mittleren Temperatur wiedergegeben. Die bei  $x = (2, 2)$  gestartete Population passiert vier lokale Minima (vier Stufen in  $F_{\min}$  - der Fitness des Besten der Population), ohne stecken zu bleiben, da die Temperatur sich bis zum Zeitschritt  $t = 500$  kaum vermindert. Beginnend mit  $t = 700$  besetzt schließlich die gesamte Population das globale Minimum (starke Verringerung von  $\langle F \rangle$ ) und die Temperatur kühlt sich bis auf den minimal zugelassenen Wert von 0,1 ab.

Dieser Effekt der Selbstabkühlung kann wie folgt veranschaulicht werden: Sucher, mit hoher Temperatur, die sich bereits im Minimum befinden, sind noch zu beweglich. Sie verlassen das Minimum und werden ausselektiert, es sei denn sie gelangen in ein tieferes. Ist kein tieferes Minimum zu finden, so werden immer mehr Sucher hoher Temperatur ausselektiert – die Population kühlt sich im tiefsten zu erreichenden Minimum ab.

Abschließend wollen wir das Konvergenzverhalten aller vier Strategien für das Beispiel  $F(x) = x^2$  vergleichen. Abb. 2 zeigt die, aus den numerischen Lösungen für gleiche Parameter gewonnene Entwicklung der mittleren Fitness und ihrer Standardabweichung und Abb. 3 die Verteilungen nach zehn Sekunden ( $t = 10$ ). Die Boltzmann (BS) und die Darwin Strategie (DS) erreichen den annähernd gleichen Endwert, wobei DS sehr langsam startet, dann jedoch beschleunigt und BS erreicht. Die Boltzmann-Darwin (BDS) kombiniert dieses Verhalten mit dem monotonen Absinken der BS und



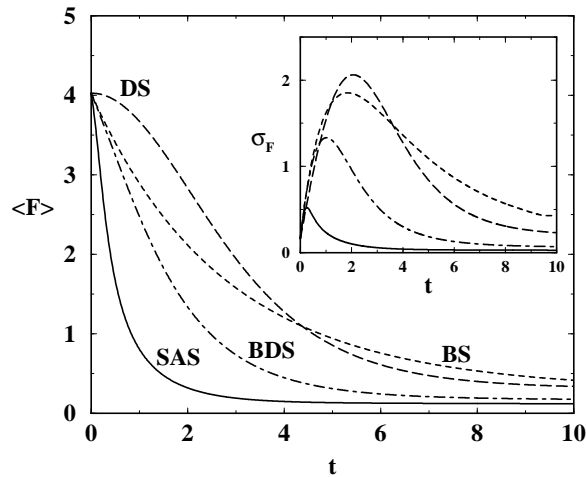


Abbildung 2: Entwicklung der mittleren Fitness und Standardabweichung der Boltzmann (BS), Darwin (DS), Boltzmann-Darwin (BDS) und der Self Annealing Strategie (SAS) für die Minimierung von  $F(x) = x^2$ . Numerisch gelöst für:  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $\kappa = 3$ ,  $D = 0,1$ ,  $D_\beta = 0,01$ .

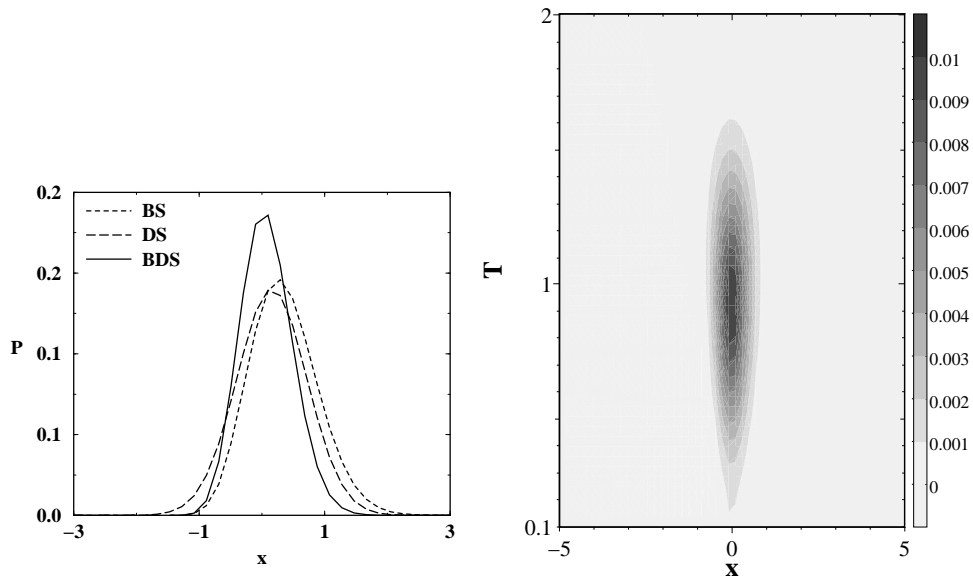


Abbildung 3: Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Strategien nach  $t = 10$ . Links:  $P(x)$  für Boltzmann (BS), Darwin (DS), Boltzmann-Darwin Strategie (BDS). Rechts:  $P(x, T)$  der Self Annealing Strategie.

unterbietet damit beide. Die schnellste Suche und den besten Endwert zeigt die Self Annealing Strategie (SAS). Da sie die Temperatur erniedrigt, im Gegensatz zur Konstanz der drei anderen Strategien, beschleunigt sich nicht nur die Suche, sondern die Population konzentriert sich auch mehr im Minimum und erreicht daher einen tieferen Wert für  $\langle F \rangle$ . Diese Konzentration ist in ihrer Verteilung  $P(x, T, t = 10)$  in Abb. 3 rechts deutlich zu erkennen: Für kleine  $T$  schnürt sie sich um das Optimum  $x = 0$  zusammen. Die Verteilungen der anderen Strategien sind links wiedergegeben: Während BS und DS noch nicht ganz das Optimum erreicht haben, beginnt sich die BDS dort bereits zu konzentrieren.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Konzepte der Mischung und der Temperaturanpassung die Eigenschaften einer Evolutionären Strategie deutlich verbessern. Beide machen es dem Algorithmus möglich, auf unterschiedliche Gegebenheiten der Fitnesslandschaft zu reagieren. Mischung befähigt ihn in Gebieten schwacher und starker Krümmung zu arbeiten. Die Temperaturanpassung steuert die Beweglichkeit der Sucher in Abhängigkeit von der Verteilung der erreichbaren Optima. Ob diese Verbesserungen hin zur *optimalen* Strategie führen – bleibt selbst: Eine Frage an die Evolution.

Dieser Beitrag ist Prof. Werner Ebeling gewidmet, dem ich es verdanke, das faszinierende Gebiet der Selbstorganisation und Evolution kennenlernen zu können und der mit seiner Arbeit und seinen Ideen, mein Denken beeinflusste und erweiterte.

## Literatur

- [1] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt Jr., and M.P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671–680, 1983.
- [2] I. Rechenberg. *Evolutionstrategien - Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Information*. Friedrich Frommann Verlag (Günther Holzboog K.G.), Stuttgart - Bad Cannstatt, 1973.
- [3] J.H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [4] D.B. Fogel. *Evolutionary computation - toward a new philosophy of machine intelligence*. IEEE Press, Piscataway NJ, 1995.
- [5] J.R. Koza. *Genetic programming: On the programming of computers by means of natural selection*. MA. MIT Press, Cambridge, 1992.
- [6] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.*, 21:1087–1092, 1953.
- [7] P.J.M. Laarhoven and E.H.C. Aarts. *Simulated Annealing: Theory and Applications*. Reidel, Dordrecht, 1987.

- 
- [8] T. Boseniuk, W. Ebeling, and A. Engel. Boltzmann and Darwin Strategies in Complex Optimization. *Phys. Lett.*, 125:307–310, 1987.
  - [9] W. Ebeling and A. Engel. Models of evolutionary systems and their application to optimization problems. *Syst. Anal. Model. Simul.*, 3:377–385, 1986.
  - [10] N.G. van Kampen. *Stochastic processe in physics and chemistry*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1981.
  - [11] W. Ebeling and R. Feistel. *Physik der Selbstorganisation und Evolution*. Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
  - [12] W. Ebeling and R. Feistel. Models of Darwinian proceses and evolutionary principles. *BioSystems*, 15:291–299, 1982.
  - [13] W. Ebeling, A. Engel, and R. Feistel. *Physik der Evolutionsprozesse*. Akademie-Verlag, Berlin, 1990.
  - [14] R.A. Fisher. *The Genetical Theory of Natural Selection*. Oxford University Press, Oxford, 1930.
  - [15] M. Eigen. The selforganization of matter and the evolution of biological macromolecules. *Naturwiss.*, 58:465, 1971.
  - [16] H.-P. Schwefel. *Numerical Optimization of Computer Models*. Wiley, New York, 1981.
  - [17] D.E. Goldberg. *Genetic Algorithms in search, optimization and machine learning*. Readin, MA: Addison-Wesley, 1989.
  - [18] L. Schimansky-Geier. Beschreibung Evolutionärer Algorithmen durch 2-Teilchenreaktionen. private communication, 1996.
  - [19] T. Boseniuk and W. Ebeling. Evolutionary strategies in complex optimization: The travelling salesman problem. *Syst. Anal. Model. Simul.*, 5:413–422, 1988.
  - [20] T. Asselmeyer, W. Ebeling, and H. Rosé. Analytical and numerical investigations of Evolutionary Algorithms in continous spaces. In *PPSN*, 1996.
  - [21] T. Asselmeyer and W. Ebeling. Unified description of evolutionary strategies over continous parameter spaces. *submitted to BioSystems*, 1996.
  - [22] F. Schweitzer, W. Ebeling, H. Rosé, and O. Weiss. Network optimization using evolutionary strategies. In *PPSN*, 1996.
  - [23] J.D. Nulton and P. Salamon. Statistical mechanics of combinatorical optimization. *Phys. Rev. A*, 37:1351, 1988.
  - [24] B. Andresen and J.M. Gordon. Constant thermodynamic speed for minimizing entropy production in thermodynamic processes and simulated annealing. *Phys. Rev. E*, 50:4346–4351, 1994.