

# Sex and Math and Literature

Aus dem Tagebuch einer Hochbegabten

2012

24. Februar: Ich bin gerettet!! Wie ruhig und heimelig es hier ist in dieser Gelehrtenhöhle. Welch eine Auswahl an abgefahr'nen Büchern. Hier werde ich mich wohl fühlen und wieder sammeln können. Endlich muss ich nicht mehr unterwegs sein und kann unerkannt bleiben. Ich bin angekommen! Ausgerechnet bei einem verschrobenen alten Lehrkörper. Ich hätte es schwerlich besser treffen können. Wie es wohl dazu kommen konnte? War es nicht ein astronomisch unwahrscheinlicher Zufall? Wie kann mir dieser Lenz aus Hamburg nur so vertraut vorkommen? Woher kenne ich ihn? Aus dem Internet. Aber in welchem Kontext?

26. Februar: Was für ein schöner Tag das war! Das fröhliche Filmeschauen und die gehaltvollen Gespräche! Bert scheint es wirklich ernst zu meinen mit unserem Bildungsprojekt in Wohngemeinschaft. Zwei Jahre sind eine lange Zeit, 12% meines bisherigen Lebens, für Bert aber nur 3%. Hinsichtlich unserer zukünftigen Leben verhält es sich umgekehrt. Im Alter bestimmt die Vergangenheit, in der Jugend die Zukunft das Leben. Insofern sollte es auch für mich nur eine kurze Episode werden, für zwei Jahre hier nicht herauskommen zu können. Um nicht gefunden zu werden, muss ich konsequent bleiben, andernfalls wäre alles umsonst gewesen. Ist mir Birte abhanden gekommen wie *Sumire Miu*? Harukis Buch ist großartig, bewegend ohne sentimental zu sein, zugleich rational distanziert wie einfühlsam nahegehend. Ich werde es unbedingt noch zu Ende lesen.

27. Februar: Endlich komme ich dazu, die Originalarbeiten Gödels durchzuarbeiten, seine Beweise zur Widerspruchsfreiheit und Unvollständigkeit der Prädikatenlogik 2. Stufe. Mit welchen Argumenten er wohl die klassische Logik rechtfertigt? Und worin genau sich logisch und nicht nur methodisch, intuitionistische, konstruktive und klassische Logik unterscheiden? Konstruktiv existiert Birte nicht mehr, nur noch formal. Die vereinbarten Zeilen aus dem *Sonnenzeitalter* wird sie finden, wenn ich Bert überrede, eine Seite dazu im Internet zu veröffentlichen: *Angekommen von sehr weit her / Ein Gefühl eigentümlich schwer / Verwoben im Dunkel der Nacht / Spür ich eine drängende Macht / Die zur Wahrheit mich erhebt / Wo so viel im Nebel schwebt / Aus des Sumpfes klammer Dichte / Schon erschau ich das Lichte / Blicke bebend in die Weite / Doch wer steht mir noch zur Seite / Und es strahlt im hellsten Scheine / Das Sonnenzeitalter eine.* Was wir uns da so überstürzt altklug zusammenreimten? Kann ein Sonnenzeitalter existieren und eindeutig sein? Das wäre nur in der Rückschau möglich; denn die Zukunft ist ein Kontinuum

von Möglichkeiten und die Vergangenheit eine diskrete Ansammlung von Wirklichkeiten. Prognosen sind kontinuierlich, Fakten diskret. Wo Birte wohl gerade sein mag? Aus welchem Kontinuum von Möglichkeiten wird sie sich diskret verwirklichen?

29. Februar: Mein 16. Geburtstag ist verfliegen wie im Rausch. Ganz so wie die anderen Tage schon. Wie macht der alte Sack das bloß? Nächste Woche, wenn er wieder arbeitet, werde ich wohl endlich mit meinen Projekten weiter kommen. Immerhin haben wir einige praktische Arbeit geleistet – und die meisten Fotos werde ich verwenden können. Wie mich das angetörnt hat, mich einfach blind einem Fremden auszuliefern!? Nun weiß ich, dass ich mir keine Sorgen machen muss und ganz ungezwungen mit dem alten Mann werde zusammenleben können. So ungehemmt und spontan wie wir waren, spürten wir dennoch unsere Grenzen. Zu seinem Geburtstag Ende Mai werde ich mich ihm als Geschenk anbieten: auf dass er 24 Stunden lang mit mir machen kann, was immer er will. Mit der Henkerskapuze über dem Kopf und nackt unter dem langen schwarzen Mantel soll er seinen vor ihm schwankenden Phallus in Anschlag bringen, sich auf mich stürzen und während ich mich an ihn klammern und mich in ihn verkrallen werde, soll er mich wild stoßen und tiefsaugend lutschen, auf dass wir weiter und weiter unsere Grenzen ausloten. Wie häufig ich davon nicht schon geträumt habe! Er soll hinter mir her kriechen und krabbeln, mich halten und wenden, immer und immer wieder in mich eindringen ... Und wie sich mit dem Hinauszögern täglich die Vorfreude steigern wird! Aber wird er sich darauf einlassen? Welcher Mann sollte einem solchen Geschenk schon widerstehen können, zumal süße Mädels alte Säcke unschwer verführen können sollten! Und haben wir nicht bereits gefickt? Oder habe ich mir das nur eingebildet, weil es fast wie von selbst flutschte und plötzlich so orgasmisch schön wurde? Jedenfalls habe ich momentan meine unfruchtbaren Tage und werde sie auch Ende Mai haben. Gute Voraussetzungen für ungehemmtes Vögeln auf freiem Schussfeld. Man sollte schließlich selbst erlebt haben, worüber man schreibt und was man zeichnet. Wie es wohl der jungen Sonja mit dem alten Weierstraß ergangen war? An manchen Tagen war er 16 Stunden lang bei ihr! Haben sich die beiden wirklich die ganze Zeit nur mit Mathematik beschäftigt oder sind sie sich vielleicht auch sinnlich näher gekommen? So ein Zusammenleben wie mit Bert heute war noch nicht möglich. In der Hinsicht hat es einen wesentlichen Fortschritt gegeben. Denn die Männer konnten sich schon immer amüsieren, brauchten sie doch nur ins Bordell zu gehen. Heute können sich ebenso die Frauen ihre Liebhaber aussuchen. Sonja musste ihren Karl jedenfalls ziemlich beeindruckt haben, wenn er ihr (nach Meschkowski) schreibt: *Und niemals habe ich Jemanden gefunden, der mir ein solches Verständnis der höchsten Ziele der Wissenschaft und ein so freudiges Eingehen auf meine Absichten und Grundsätze entgegengebracht hätte, wie Du!* Ganz anders erging es ihm mit Kronecker. Über ihn schreibt Weierstraß an Sonja: *Er redet nicht nur Unsinn, sondern handelt auch thöricht.* Die realen Zahlen lediglich als Menschenwerk zu verstehen und explizit zu konstruieren, darauf hatte Kronecker immer wieder halsstarrig beharrt; seinen Konstruktivismus aber nicht präzisiert. Was wohl Sonja darüber dachte? Sie hatte zwar über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen promoviert, die Grundlagen der Analysis waren aber noch nicht vollständig ausgearbeitet. Bert hat dazu die Arbeit Lorenzens von 1951 auf seinem No-

tebook: *Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis*. Einleitend merkt er darin an: *Auf die Kritik an der naiven Mengenlehre hin hat man versucht, diese durch eine Axiomatik zu stützen – in mißverständener Analogie zur Geometrie. Mit geeigneten Axiomen läßt sich nun zwar alles beweisen, aber nichts begründen. Die Aufgabe der Konstruktion von reellen Zahlen ist m.W. erstmalig von H. WEYL (Das Kontinuum, 1918) gelöst worden. WEYL benutzt allerdings die arithmetischen und logischen Regeln ohne Begründung, insbesondere auch das tertium non datur.* Das ist also der Kontext, aus dem Bert letztens zitiert hat. Und was hat das Beweisen mit Nihilismus zu tun? Man beweise mir einen Satz und alles ist gesagt. Soweit der Nihilist in Turgenjews *Väter und Söhne*. Sonja läßt in ihrem nachgelassenen Roman *Die Nihilistin* sagen: *Ich bin allein auf der Welt und hänge von Niemandem ab. Mein persönliches Leben ist abgeschlossen. Für mich erwarte und will ich nichts mehr.* Die Erzählerin ist beeindruckt darüber, dass sie *die Kleinigkeiten des Lebens* überhaupt nicht interessierten: *Sie war bloß von einem Gedanken ganz eingenommen: einen Inhalt und Zweck des Lebens zu finden.* Ja, die Welt ist sinnlos und das Leben hat keinen Sinn; also musst du ihn dir selbst suchen und – finden. Berts Lebenssinn ist es, die Welt verstehen zu wollen ... und meiner? Meinen Talenten zu folgen (oder folgen zu müssen?), um mich am Schaffen erfreuen zu können (und anderen durch meine Werke daran Anteil nehmen zu lassen?). Aber vor allem sollte das selbstbestimmt möglich sein!! Wenn es nicht schon einen Roman über *Väter und Töchter* geben sollte, werde ich ihn mit Birte unbedingt schreiben müssen ...

1. März: Der alte Mann ist einkaufen gegangen. Am Wochenende werde ich ihn zum abendlichen Spaziergang an der Elbe überreden. Mit Kopfschleier unterm Sweatshirt werde ich nicht besonders auffallen, zumal wenn es dunkel ist. Eine echte Henkerskapuze wäre auch nicht schlecht ... und vielleicht denkt Bert sogar daran, im Horror-Shop vorbeizuschauen ... und dann könnten wir gemeinsam zur Gothic-Night in den Kaiserkeller gehen. Den wird er sicher noch aus seiner Jugendzeit kennen. Waren 1960 dort nicht schon die Beatles regelmäßig aufgetreten ... im schwarzen Outfit? Ob die Nihilistin Sonja ebenfalls in schwarz herumlief? Kaum zu glauben, aber wer weiß? Karl hätte es wohl nicht sonderlich gestört. Der war von seiner Studentin derart angetan, dass er sie privat solide in die Analysis einführte, zu der er mit seiner *Epsilontik* Grundlegendes beigetragen hatte. Differentialgeometrie, Funktionentheorie und Differentialgleichungen waren seine Hauptthemen und sie bieten ebenfalls den Übergang in die Relativitätstheorie. Und Sonja? Neben ihrer Dissertation über die Theorie partieller Differentialgleichungen (Cauchy-Kovalevskaya-Theorem) hat sie sich in Berlin zwischen 1870 und 1874 mit Abelschen Integralen beschäftigt und im Anschluss an Laplace die Stabilität der Saturnringe untersucht. Danach ist sie nach Russland zurückgekehrt und hat als Journalistin gearbeitet. 1878 ist ihre Tochter Sofia zur Welt gekommen. Die wissenschaftliche Arbeit hat die Mutter dann Anfang der 1880er Jahre wieder aufgenommen und allgemeine Lösungen der Lamé-Gleichungen gesucht. Seit 1884 ist Sonja Professorin in Stockholm und berühmt geworden durch ihre Arbeit zur Klassischen Mechanik, die abschließend die dritte allgemeine Bewegungsform eines starren Körpers behandelt. Wie Bert wiederholt angedeutet hat, ist die Klassische Mechanik durch die Quantenmechanik keineswegs überholt worden;

denn Bohm hatte 1952 die moderne wieder in die klassische Physik eingeordnet. Wie aber der Atomismus der Thermo- und Quantenmechanik mit dem Kontinuum der Relativitätstheorie zusammenzubringen ist, muss ich noch herausfinden.

2. März: Die komplexen Zahlen: Gibt es einen Zusammenhang zwischen Gaußens Fundamentalsatz der Algebra und dem Cauchy-Kovalevskaya-Theorem? Bei der Suche nach allgemeinen Lösungen von Differentialgleichungen verfolgte Cauchy eine Analogie zwischen der Rolle der komplexen Zahlen in der Algebra und derjenigen der analytischen Funktionen in der Analysis. In Analogie zum Fundamentalsatz der Algebra suchte er zu beweisen, dass jede Differentialgleichung mit analytischen Koeffizienten eine analytische Lösung haben sollte. Im Unterschied zu Gauß löste Cauchy das Problem aber nur hinsichtlich der Existenz analytischer Lösungen, wie sie von den Anfangsbedingungen abhängen blieb offen. Weierstraß interessierte sich nicht primär für die Lösbarkeit von Differentialgleichungen. Sie waren ihm lediglich Mittel zum Zweck der Charakterisierung analytischer Funktionen. Und so wies er nach, dass die Lösungen eines Systems gewöhnlicher, polynomialer Differentialgleichungen stets analytisch sind und eindeutig von den Anfangsbedingungen abhängen. Die Übertragung dieses Nachweises auf ein entsprechendes System partieller Differentialgleichungen stellte der alte Professor seiner jungen Studentin als Aufgabe für ihre Doktorarbeit. Mit dem Beweis des nach ihr benannten Theorems hatte Sonja dann 1874 für die Analysis das geleistet, was Gauß mit dem Fundamentalsatz in der Algebra gelungen war. Sonja war mit ihrer Theorie der partiellen Differentialgleichungen in der komplexen Analysis über die Schultern der Riesen Cauchy, Riemann und Weierstraß hinausgestiegen. Ihren zweiten Durchbruch erreichte sie in der analytischen Mechanik im Anschluss an Euler und Lagrange. Die allgemeinen Bewegungsformen eines starren Körpers hatte zuerst Euler 1758 untersucht und die gefundenen Kreiselgleichungen für den symmetrischen, kräftefreien Fall gelöst. Lagrange fand dann 1815 die Lösung für den symmetrischen Fall unter linearer Gravitationskraft. Die komplizierteste Lösung für den letzten möglichen, asymmetrischen Fall unter linearer Gravitationskraft ermittelte Sonja 1886.

3. März: *THE RISE and FALL of ALEXANDRIA, BIRTHPLACE of the MODERN WORLD; HYPATIA of ALEXANDRIA, Mathematician and Martyr* und *The Swerve, How the world became modern*. Die naturphilosophische Entwicklung von der Antike in die Moderne beginnt mit Lukrezens Lehrgedicht *De rerum natura*, schreitet fort mit Hypatias Kommentaren zu den Kegelschnitten des Appollonius und der *Syntaxis* des Ptolemaios, verdichtet sich in Adas Kommentar zur *Analytical Engine* von Babbage, mündet ein in die Arbeiten Sonjas über partielle Differentialgleichungen, elliptische Integrale und die Saturnringe und findet ihr vorläufiges Ende mit Emmys Invariantentheoremen: All das verkörpert Lenz intellektuell. Und wie weit treibt sie die Invarianzforderungen? Mit Mack und Lehmann bis in das Extrem umgangssprachlicher *Eichinvarianz*? Claudia Lehmann scheint jedenfalls die einzige Filmemacherin weltweit zu sein, die über Gittereichtheorien promoviert hat. Und erotisch? Da gibt Hypatia nichts her, war sie doch lebenslang Jungfrau geblieben. Aber hatte sie sich wirklich nur der Mathematik verschrieben? Wir

wissen es nicht. Ada heiratete standesgemäß und wurde die *Lady of Lovelace*. Mathematik blieb ihr Hobby, das Muttersein eine Pflicht. Sonja ist da schon ergiebiger: Dostojewski, Wladimir, Weierstraß, Vollmar, Perrot, Maxim. Verliebtheiten, eine Scheinehe und Liebschaften: wohl nie geglückt; stets misslungen, weil sie eigenständig bleiben wollte, obwohl sie Mutter einer Tochter wurde. Lenz reiste von Riga nach Straßburg, das er getrieben vom *Sturm und Drang* der Zeit in Richtung Weimar wieder verließ. Sonja machte sich als russische Mathematikerin und Nihilistin auf den Weg nach Westen bis in die akademischen Gelehrtenkreise und die Pariser Kommune der proletarischen Aufständler. Und heute? Ein hochbegabtes gothic girl wird von ihrem Zwilling getrennt, nach Sydney ins Internat geschickt und flieht nach Hamburg zu einem Lehrkörper. Wird sie sich unter Occupy-Aktivistinnen und Polit-Piraten begeben oder ihren literarischen und mathematischen Neigungen folgen?

4. März: Warum ging mir die Innigkeit am Wasser so nahe? Ich wollte doch eigentlich einen langen Spaziergang machen. Aber der kühle Blick von Övelgönne über das glänzend wellige Wasser nach Westen weckte in mir wieder die Gefühle des sehnenenden Schauens nach Osten auf dem Poller am Port Jackson. Wann werde ich Birte endlich wiedersehen? Die Bilder von mir scheinen mir wie von ihr. Die sind ihm wirklich gut gelungen. Was meinen Lehrkörper wohl dazu bewogen haben mag? So hat er mich also nach meiner Annäherung gesehen, als er sich umwandte und auf mich zukam. Dem Näherkommen entspricht das Zoomen bis aufs Gesicht, das hell hervorleuchtet unter der Kapuze. Ich muss ihn schwer beeindruckt, wenn nicht gar erleuchtet haben. Und auf dem Poller waren wir vereint in der gemeinsam erlebten Sehnsucht. Aber wonach sehnt sich noch ein alter Mann? Sicher war es eher ein Schwelgen in Erinnerungen.

8. März: Einige Tage konzentrierter und erfolgreicher Arbeit in der Abgeschiedenheit eines Ottenser Penthouses. Das hätte ich mir nicht Träumen lassen. Wie ruhig es hier trotz der Großstadtumgebung ist. Der alte Mann verlässt morgens ohne viel Aufhebens die Wohnung, kommt abends von der Uni zurück, genehmigt sich im Wohnzimmer ein karges Abendbrot und schaut dabei in der Glotze Informationssendungen. Danach sieht er sich einen Film an, hört Musik, liest oder schreibt. Fehlt etwas im Kühlschrank, kauft er es einfach nach. Ohne Gefahr zu laufen, entdeckt zu werden, kann ich in Ruhe meinen Projekten nachgehen. Zur Entspannung oder Abwechslung lese ich einen Comic. Sogar Manaras gesammelte Werke und die drei Bände *Lost Girls* hat Bert in seiner Sammlung. Und dann die Klassiker-Verfilmungen für den Theaterkanal: *Faust*, *Werther*, *Lenz*, *Baal* und *Per Gynt*. Was für ein Paradies! Am Freitag werde ich mich abends zu ihm setzen und am Wochenende sollten wir wieder einen Spaziergang probieren. Von Birte ist noch immer keine Nachricht eingegangen. Dafür werde ich am Wochenende meine Monatsblutungen überstanden haben und die fruchtbare Phase lauert. ... Obwohl ... Eigentlich ist die Paarung einer jungen Frau mit einem alten Mann geradezu ideal. Die Schülerin geht nach der Geburt weiter ihren Studien nach und der Rentner kümmert sich um den Nachwuchs. Die Frau macht trotz Kind Karriere, weil der Mann sie schon hinter sich hat. Er sollte allerdings noch mindestens zehn Jahre durchhalten, bevor das Kind aufs Internat

geschickt werden könnte. Das als Vorgeschichte meiner *Lenz*? Oder eher als ihre eigene Biographie? Ein gothic girl sollte das Kind eines greisen Untoten und einer weisen Nihilistin sein. Aber warum immer diese spießige Kleinfamilienidylle? Die Kleinen könnten kollektiv erzogen werden: von der Kinderkrippe bis zur Uni. Und alles unter Frauen. Die Reproduktion durch Klonen oder Parthenogenese ... bis zum letzten Mann.

10. März: Endlich ist es raus! Ich hatte mir ganz unnötig Sorgen darüber gemacht, nicht auch mit Birte beim alten Mann unterkommen zu können. Zunächst einfach ein Zeichen von ihr auf das Erkennungsgedicht abzuwarten, scheint wohl richtig zu sein. Aber meine Sorge und Ungeduld? Die überwinde ich wie immer im Schaffensrausch intensiven Arbeitens. Ähnlich scheint es meinem Lehrkörper zu ergehen. Und wie es ihm gelang, eine meiner Urszenen aufzudecken!? Wieso war ich selbst nicht darauf gekommen? Bedürfen wir stets eines Katalysators oder Funkens, der die Reaktion auslöst oder das Feuer entfacht? Aber was überdeckt sich eigentlich in dem wiederkehrenden Traum? Und welche Szene reproduziere ich, wenn ein Kopf zwischen meine Beine gerät? So wie die Höhle im Märchenwald ein Symbol der Vulva ist, steht der Turm für den Phallus, ebenso wie das Einhorn ... Und das hat die Jungfrau vor sich ... als Skulptur an der Südwand des Regensburger Doms. Davor stand ich immer wieder staunend als kleines Mädchen!? Ist das nicht eher die Urszene? Und hatte Vater sich seinerzeit wirklich über Mutter hergemacht? War es nicht vielmehr eine Geliebte gewesen? Im Praktikum wurde uns die Szene dann tatsächlich von unseren Lehrkörpern demonstriert; das zumindest ist sicher. Jetzt, wo mir meine Reproduktionsneigung klar geworden ist, sollte ich die Inszenierungen abzuwandeln versuchen, um zu erfahren, wie weit sie reichen und wie viel sexuelle Freiheit ich dabei zu erlangen vermag. Aber nichts überstürzen ... bleibt doch noch die Frage, was es mit der Maskierung auf sich hat? Mozart leidet sein Leben lang am dämonisierten Vater und *Yoko* verfällt ihrem *Yu* nur in Gestalt der „*Lady Scorpion*“ *Sasori*. Was haben die Verkleidungen bei mir ausgelöst? Sie überdecken sich mit denen ... eines mittelalterlichen Henkers und ... des alten Nihilisten und ... *Vs*. Aber wofür steht das *V* noch? Für *Vlad*? *Vlad Dracul*? Hatte ich als Kind Horrorfilme gesehen, die sich mir einprägten und eine weitere Urszene schufen, die ich reproduziere? Bei Bert ist es offensichtlich das niedliche Kindchenschema in Verbindung mit wohlgeformter Weiblichkeit, das ihn antörnt und zu ewiger Wiederholung drängt, im Traum wie in der Wirklichkeit. Das scheint eher angeboren als erworben zu sein; denn junge Frauen versprechen Fortpflanzungserfolg und alte Männer haben im Konkurrenzkampf überlebt. ... Vielleicht sollte ich mich wirklich mal genauer mit Optimierungsalgorithmen beschäftigen, besonders mit dem Darwins und wie weit er schon mathematisch verstanden und informatisch implementiert worden ist. Mathematisch läuft es beim Optimieren nach Darwin und Boltzmann auf eine verallgemeinerte Schrödinger-Gleichung hinaus. Damit wäre ich wieder bei Sonja und der Theorie partieller Differentialgleichungen. In diesen Bereich fällt auch das noch ungelöste Jahrhundertproblem, für die Navier-Stokes-Gleichungen der Strömungsmechanik mathematisch die Existenz und Stetigkeit physikalisch sinnvoller Lösungen im dreidimensionalen Raum nachzuweisen.

11. März: Was für ein Tag! Es ist bereits Sonntag und ich bin wieder im Bett, kurz nach einer Lachsalmade im Bad mit Bert. Was mussten wir eigentlich so ungestüm rauslassen? War es der Berührungsschlag, nachdem alles gesagt worden war? Wahrscheinlich; denn nun eröffnet sich uns die nahezu grenzenlose Freiheit! Ein gelehrter alter Mann, der nicht mehr lange zu leben hat und eine hochbegabte junge Frau, die auf Horrorvisionen steht: das ist doch eine ideale Paarung dunkler Erotik mit leuchtender Erkenntnis, fast wie bei *Justine* und *Juliette* de Sades: *die Leiden der Tugend* und *die Wonnen des Lasters*. Aber wie tugendhaft wird Birte sein und wie lasterhaft bin ich? *Koike* hat ihrem im Koma liegenden Vater dafür, dass er sie als Kind misshandelt hatte, den pathologisch prallen Ständer abgeschnitten. Was das für eine spektakuläre Sauerei herauschießenden Blutes war!? Aber was, wenn Bert recht damit hat, dass Geschwister sich mit dem Einsetzen der Pubertät eher fremd werden als näher kommen? Dann würde gerade die vor der Geschlechtsreife erzwungene Trennung danach eine Wiedervereinigung ermöglichen, gleichsam auf höherer Stufe: auf die kindlich-verspielte könnte postpubertär die erotisch-intellektuelle Symbiose folgen ... Was für eine Perspektive! Meine ersehnte Vereinigung mit Birte wird womöglich gerade dadurch wahr, dass mein Vater die Trennung erzwungen hatte!? Müsste ich ihm dafür nicht dankbar sein? Aber wo ist Birte? Bis wir erwachsen sind, darf er uns nicht wieder auseinander reißen! Insofern könnten wir mit dem alten Mann hier ideale Lebensbedingungen ausgestalten. Da Birte sich neben der Literatur auf die Physik spezialisiert hat, wären wir das erste Zwillingpaar auf dem Weg in die mathematische Physik. Aber wo ist Birte? ... Solange sie meine Zweierbeziehung mit Bert nicht in eine Dreierkonstellation verwandeln kann, sollte ich mich wohl eher um den bald sterbenden alten Mann kümmern, statt mich im schwelgenden Sehnen zu verzehren! Denn dafür bin ich noch zu jung! Zum Glück ist er nicht der Typ, um den man sich Sorgen machen und den man bemuttern müsste. Aber eine erotisch-intellektuelle Freundschaft sollte möglich sein. Wenn ich nur daran denke, wie vertraut wir uns schon nach nur zwei Wochen sind, wie viele Anregungen er mir bereits gegeben hat und wie gut wir im Alltag harmonieren, da wir die gleichen Interessen haben und uns zueinander hingezogen fühlen. Sein Sterben in Verbindung mit meinem Erwachsenwerden macht das Ende nur noch einfacher: Während er im NICHTS aufgeht, erlange ich ALLES!

13. März: In der Nacht zu Einsteins Geburtstag muss ich seinem Fan eine Freude bereiten, die uns zugleich befriedigt, also spontan sein sollte, was Planung ausschließt. Der Honigmund war schon nicht schlecht gewesen. Und harmlos. Er ist ja so empfindlich und ängstlich. Vielleicht liegt es am Alter; denn es passt so gar nicht zu seinem Freidenkertum, seiner Ästhetik, dem Nihilismus und seiner Wissenschaftlichkeit. Andererseits bleibt er ein ruhender Pol in meiner Halbheit, der Rücksicht darauf nimmt, ein Rettungsanker meiner Flucht, der seine Grenzen kennt und mir meine zeigt ... bis ich mit Birte wieder ein vollständiger Zwilling werden kann. Der letzte Sonntag wird ihn ein bisschen aufgerüttelt haben und hoffentlich mehr fordernd und draufgängerisch werden lassen. Nur was weh tut, bewiesen wurde oder provoziert, zählt, in seiner ganzen Spannweite zum seichten Behagen, bloß Geglaubten und belanglosen Gerede: zur ganzen Hässlichkeit der Welt. Die Technik funktioniert einigermaßen, aber was in der Wissenschaft ist wahr und

gilt für die Ewigkeit? Nur die Invarianten der mathematischen Struktur? Und was ist die Invariante meines Monsterschemas? Die schwarze Henkerskapuze in Verbindung mit einem ausgebreiteten schwarzen Umhang oder langen Mantel wie im Traum? Die Kapuze allein funktioniert nur minimal, quasi als Schwellenniveau. Welche stimulierenden Drangsalierungen müssten zum Ausreizen der Schmerz-Lust-Dynamik bei meinem neuen Lehrkörper hinzukommen?

20. März: Sex im Dunkeln gehört ins Biedermeier verklemmter Spießbürger und wie viel lieber sähe mich mein alter Mann hell erleuchtet in meiner ganzen weiblichen Wohlgestalt. Aber wer weiß? Im Reich der Schatten gedeiht die Phantasie besser. Was man sich nicht alles dabei vorstellen kann: die Gegenwart Amors oder Draculas etwa ... Und wovon mag mein alter Sack träumen? Von einer niedlichen Asiatin? Morgen ist Frühlingsanfang und ein Fruchtbarkeitsfest angesagt, aber ungeplant. Ich warte einfach mal ab und werde mich scheinbar zufällig auf dem Ergosit platzieren ... Was war das für eine schöne Orgasmuswooge, die sich an Einsteins Geburtstag gleich einer Monsterwelle in mir aufschaukelte!? Erging es Schrödinger im Bergrefugium der Schweizer Alpen mit seiner Liebsten nicht ganz ähnlich? Und das Ergebnis war: die Wellengleichung für die Ladungsverteilung der Elektronen im Atom. Hinsichtlich der Optimierung können Boltzmann- und Darwinstrategie in Verbindung mit einer Transformation der Fitnesslandschaft durch eine verallgem. Schrödinger-Gleichung beschrieben werden. Und die nichtlineare Schrödinger-Gleichung (NLS) vermag sogar die besonderen Formen von Wasserwellen darzustellen. Ihre Herleitung muss ich mir aber noch aneignen und ebenso ihre allgemeinen Lösungen. Und all das im Kontext der Theorie partieller Differentialgleichungen Sonjas. Ist das aufregend! Ich erliege der Faszination für die NLS:

$$i \left( \frac{\partial a}{\partial t} + c_g \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \alpha \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \beta |a|^2 a = 0,$$

wobei:

$$\omega_0 = \sqrt{gk_0 \tanh(k_0 h)}, \quad c_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}, \quad \alpha = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0}$$

$$\beta = \frac{\omega k_0^2}{16 \sinh^4(k_0 h)} \left( \cosh(4k_0 h) + 8 - \tanh^2(k_0 h) \right) - \frac{\omega}{2 \sinh^2(2k_0 h)} \frac{(2\omega \cosh^2(k_0 h) k_0 c_g)^2}{gh - c_g^2}$$

Mit der Tiefwasser-Näherung:  $k_0 h \rightarrow \infty \Rightarrow \tanh(k_0 h) \rightarrow 1$ , reduziert sich die nichtlineare Schrödinger-Gleichung auf:

$$i \left( \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\omega_0}{2k_0} \frac{\partial a}{\partial x} \right) - \frac{\omega_0}{8k_0^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\omega k_0^2}{2} |a|^2 a = 0,$$

wobei:

$$\omega_0 = \sqrt{gk_0}, \quad c_g = \frac{\omega_0}{2k_0}, \quad \alpha = -\frac{\omega_0}{8k_0^2}, \quad \beta = -\frac{\omega k_0^2}{2}$$



Die Oberflächen-Hebung  $\eta(x, t)$  ist das Produkt des Realanteils  $\Re$  von Amplitudenmodulation  $a(x, t)$  und fortlaufender Welle  $e^{i(k_0x - \omega_0t)}$ :

$$\eta(x, t) = \Re \left( a(x, t) \cdot e^{i(k_0x - \omega_0t)} \right),$$

wobei  $a(x, t)$  die exakte Lösung der nichtlin. Schrödingerlg. ist, die skaliert mit:

$$T = -\frac{\omega_0}{8k_0^2} t, \quad X = x - \frac{\omega_0}{2k_0} t, \quad q = \sqrt{2} k_0^2 a$$

folgende Form annimmt:

$$i \frac{\partial q}{\partial T} + \frac{\partial^2 q}{\partial X^2} + 2|q|^2 q = 0$$

Die nichtlineare Schrödinger-Gleichung ist integrierbar. Das ist höchst bemerkenswert!

Madelung hatte bereits 1926 den Zusammenhang zwischen der Ladungsverteilung der Elektronen und einer Wahrscheinlichkeitsströmung erkannt: *MADELUNG FLUID DESCRIPTION OF THE GENERALIZED DERIVATIVE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION*: Mit  $\Psi = \sqrt{\varrho} e^{i\Theta}$  zerfällt die komplexe Schrödinger-Gleichung in zwei reelle Madelung-Gleichungen für die Strömungsdichte  $\varrho = |\Psi|^2$  und die Strömungsgeschwindigkeit  $v = (\hbar/m) (\partial\Theta/\partial x)$ :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v) = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) v = \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\varrho}}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial U}{\partial x}$$

Neben dem üblichen Kraftterm  $\partial U/\partial x$  steht der zweite Klammerterm auf der rechten Seite der Geschwindigkeitsgleichung für das Bohm- oder Quantenpotential. Mit einer speziellen Wahl des Kraftpotentials ergibt sich eine NLS-Gleichung, die mit  $U(|\Psi|^2) \propto |\Psi|^2$  vollständig integrierbar ist:

$$i\alpha \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) - U(|\Psi|^2) \Psi = 0$$

Zakharov bezieht sich 1968 in seiner Arbeit: *STABILITY OF PERIODIC WAVES OF FINITE AMPLITUDE ON THE SURFACE OF A DEEP FLUID* auf die Tiefwasser-Näherung: *We study the stability of steady nonlinear waves on the surface of an infinitely deep fluid. In section 1, the equations of hydrodynamics for an ideal fluid with a free surface are transformed to canonical variables: the shape of the surface  $\eta(\vec{r}, t)$  and the hydrodynamic potential  $\psi(\vec{r}, t)$  at the surface are expressed in terms of these variables. By introducing canonical variables, we can consider the problem of the stability of surface waves as part of the more general problem of nonlinear waves in media with dispersion. The results of the rest of the paper are also easily applicable to the general case.* Peregrine benutzt statt der Tiefwasser-Näherung das Verhältnis der Wassertiefe zum Modulationseinfluss, wenn er 1982 in *WATER WAVES, NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS AND THEIR SOLUTIONS* schreibt: *Equations governing modulations of weakly nonlinear water waves are described. The modulations are coupled with*

*wave-induced mean flows except in the case of water deeper than the modulation length scale. Equations suitable for water depths of the order the modulation length scale are deduced from those derived by Davey and Stewartson and Dysthe. A number of cases in which these equations reduce to a one dimensional nonlinear Schrodinger (NLS) equation are enumerated.* Interessant seine abschließenden Folgerungen hinsichtlich der Stabilität von Lösungen in Abhängigkeit verschiedener Modulationen und der geometrischen Dimensionen. In Sulems Monographie: *The Nonlinear Schrödinger Equation* von 1999 wird mittels Mehrskalens-Entwicklung systematisch vorgeführt, wie aus einer Wellengleichung eine Evolutionsgleichung der Einhüllenden abgeleitet werden kann. Dabei kommt es hinsichtlich des Aufschaukelns von Oberflächenwellen zu einer Monsterwoge darauf an, die Kopplung der mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortlaufenden Einzelwellen zu berücksichtigen. Heuristisch kann die NLS angesehen werden als die Entwicklung der kleinsten, nichttrivialen Ordnung der allgemeinen nichtlinearen Dispersionsrelation.

8. April: Wir feierten ausschweifend das Frühlingsfest. Ein Hoch auf die Lust und das Leben! Die Christen bedenken das Leid und den Tod ihres angeblichen Gottessohnes. Diesem Unsinn gegenüber widmen wir uns lieber der Evolutionstheorie und einiger Strategien, nach denen die Evolution verstanden werden kann. Wenn überhaupt, ist die Welt nicht umgangssprachlich, sondern mathematisch zu verstehen. Um den evolutionären Strategien und ihrem Verständnis als Optimierungsverfahren näher zu kommen, studieren wir zwei Dissertationen: *Evolutionäre Strategien und Multitome Optimierung* von Helge Rosé und *Schrödinger-Operatoren und Evolutionäre Strategien* von Torsten Abelmeyer.

Evolutionäre Strategien werden durch Mutationen und Selektionen realisiert. Dabei erzeugen Mutationen Möglichkeiten, die durch Selektionen bewertet werden. Die Dynamik einer Strategie läßt sich als Suchfunktion  $x(t)$  in einem Möglichkeitsraum  $X$  beschreiben, die alle globalen Optima der Fitnessfunktion  $F(x)$  auf  $X$  erreichen soll. Für eine Vielzahl von Suchern charakterisiert  $P(x, t)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte der Sucher im Zustand  $x$  zur Zeit  $t$  oder die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Suchers im Zeitverlauf.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(x, t)$  der *Boltzmannstrategie* mit der stationären Verteilung

$$P(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(x, t) \sim e^{-\beta F(x)}$$

genügt folgender Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \beta D \partial_x (P \partial_x F) + D \partial_x^2 P$$

Der Diffusionskoeffizient  $D$  drückt die Art und Weise aus, wie die Mutationen vollzogen bzw. die Fluktuationen wirksam werden. Mit  $F$  ist die Fitness im Suchraum der Möglichkeiten gemeint,  $\beta = 1/T$  ist die inverse Temperatur,  $t$  steht für die Zeit und  $x$  bezeichnet die Suchvariable. Sie genügt der Langevin-Gleichung für eine Diffusionsbewegung durch Gaußsches weißes Rauschen  $\xi(t)$ :

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\beta D \partial_x F(x) + \sqrt{2D} \xi(t)$$

D.h. die Zeitentwicklung der Sucher wird bestimmt durch eine Driftbewegung, die von Fluktuationen überlagert wird.

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(x, t)$  der *Darwinstrategie* kann folgende Fokker-Planck-Gleichung hergeleitet werden:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = \gamma(F - \langle F \rangle)P + D\partial_x^2 P$$

Der erste Summand beschreibt den Reproduktions-Selektions-Term.  $\gamma$  steht für die Selektionsrate und  $\langle F \rangle$  für die mittlere Fitness. Der Diffusionskoeffizient  $D$  ist proportional zur Mutationsrate.

Im diskreten Fall ist die Darwinstrategie als Matrixgleichung zu formulieren. Mit Hilfe des Hamilton-Operators  $\hat{H} = \hat{F} - \Delta\hat{D}$  und dem Ansatz:

$$P(t) = p(t)e^{\int_0^t \langle F \rangle d\tau}$$

ergibt sich folgende Schrödinger-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\hat{p}(t) = -\hat{H}\hat{p}(t)$$

Die Dynamik der Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt dabei der Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\hat{P}(t) = \langle F \rangle\hat{P}(t) - \hat{H}\hat{P}(x)$$

Bis auf eine Transformation der Fitnessfunktion sind Boltzmann- und Darwinstrategie gleich. Beide können in einheitlicher Form durch eine Schrödinger-Gleichung beschrieben werden. In beliebigen Fitnesslandschaften bzw. Möglichkeitsräumen wird sich im allgemeinen eine kombinierte *Boltzmann-Darwin-Strategie* bewähren, in der die Boltzmannsucher einer Darwinselektion unterzogen werden.

Die Entwicklung physikalischer Systeme wird durch die Parameter  $\beta$  und  $D$  der inversen Temperatur und des Diffusionskoeffizienten bestimmt. In biologischen Systemen entsprechen ihnen Selektions- und Mutationsrate. Die Fitness wird im Such- oder Möglichkeitsraum definiert. Wonach aber jeweils gesucht bzw. woraufhin optimiert wird, bleibt offen. Bei physischen Systemen ist es in der Regel die Energie, bei biotischen sind es die Gene. In kapitalistischen Gesellschaften ist es das Geld, das optimiert wird und die Optimierung physikalischer Theorien folgt EPI: Extreme Physical Information.

Beispiele von linearen partiellen Differentialgleichungen (LPDGLn):

$$\Delta : \text{Laplace - Operator}, \Delta := \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}^2 = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2$$

beschreibt stationären Prozess, d.h. zeitunabhängigen Prozess;

Laplace-Gleichung:

$$\Delta u = 0$$

(beschreibt Potentiale außerhalb von Quellen und Senken, Gravitationspotential, elektrische Feldstärke)

Wellengleichung:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0$$

(beschreibt Schwingungsvorgänge, Ausbreitung von Schallwellen und von elektromagnetischen Wellen), beschreibt instationären Prozess.  $t$  steht für die Zeitvariable.

Wärmeleitungsgleichung:

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

(beschreibt Wärmeleit-, Diffusionsprozesse, Brownsche Molekularbewegung), beschreibt einen instationären (zeitabhängigen) Prozess, Zeitabhängige partielle Differentialgleichungen werden auch als Evolutionsgleichungen bezeichnet.

Schrödinger-Gleichung:

$$i\partial_t u - \Delta u = 0$$

(beschreibt die Bewegung von Elementarteilchen), beschreibt instationären Prozess, wobei  $i$  für die imaginäre Einheit ( $i^2 = -1$ ) steht;

Die evolutionären Strategien lassen sich durch eine verallgemeinerte (reelle) Schrödinger- oder Wärmeleitungsgleichung beschreiben, mit dem Schrödinger-Operator  $H$  als zentralem Bestandteil der mathematischen Analyse. Die grundsätzliche Struktur aller Gleichungen zur Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsdichte  $P$  für die Suche evolutionärer Strategien ist in der verallgemeinerten Wärmeleitungsgleichung zu sehen:

$$\frac{d}{dt}P(\vec{x}, t) = -HP(\vec{x}, t)$$

$H$  ist ein positiv definit, selbstadjungierter Operator der Form:

$$H = - \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (g_{ij} \sqrt{g} \partial_j) V(F(x), \nabla F, \Delta F)$$

$F$  ist die Fitnessfunktion und  $g = \det(g_{ij})$  die Metrik. Mit dem Wärmeleitungskern  $\exp(-tH)$  lässt sich die Lösung formal ausdrücken durch:

$$P(\vec{x}, t) = \exp(-tH)P(\vec{x}, 0)$$

Der Wärmeleitungskern kann wie folgt definiert werden:

$$\exp(-tH)P(\vec{x}, 0) = \int_B p_t(\vec{x}, \vec{y})P(\vec{y}, 0)d^n y$$

$B$  ist der  $d$ -dimensionale Phänotypiraum und der Kern  $p_t(\vec{x}, \vec{y})$  besitzt folgende asymptotische Entwicklung:

$$p_t(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{2\exp(-\|\vec{x} - \vec{y}\|^2/4t)}{\sqrt{(4t)^n \Gamma(n/2 + 1)}} \sum_{i=1}^{\infty} t^i \Phi_i(\vec{x}, \vec{y})$$

Dabei sind die Wärmeleitungskoeffizienten  $\Phi_i(\vec{x}, \vec{y})$  Funktionen von  $F$  und deren Ableitungen. Nach der mathematischen Analyse der Schrödinger-Operatoren bei Abelmeier sind zwei Dynamiken für  $P$  äquivalent, falls die Kerne der Schrödinger-Operatoren  $H$  durch eine lineare Transformation auseinander hervorgehen. Die Äquivalenzklassen von Darwin-Strategien enthalten als Generatoren sechs Katastrophen. Zwei äquivalente Fitnessfunktionen, die aus den gleichen Katastrophen bestehen, erzeugen äquivalente Dynamiken.

1. Mai: BIRTE HAT SICH GEMELDET!! Birte hat sich gemeldet! Gestern hatte Lisa Bert eine Mail geschickt und in Verbindung mit einer Frage zu seinem Link auf ihre Homepage wie nebenbei ein paar Frühlingszeilen über *Solveig* einfließen lassen, ihre talentierte Schülerin, die ab Mai bei Edward weiter praktizieren wolle und voraussichtlich im Laufe des Hochsommers dann endgültig nach Hamburg kommen werde. Eine anonyme Mitfahrgelegenheit auf einem Schiff habe sie auch schon. Sie wird sich dann einfach bei Bert im Büro an der Uni melden. DIE UNGEWISSHEIT HAT EIN ENDE! Im August werden wir wieder vereint ein ganzer Zwilling sein können in dieser phantastischen Gelehrtenhöhle und wunderbaren Horrorschule! Was war das für eine tolle gothic night mit dem alten Sack im Kaiserkeller! Seine zurecht gestutzte Henkerskapuze harmonierte vortrefflich mit meiner Schuluniform. Wie konnte ich mich austoben zu den fetzigen death metal Rhythmen! Der Jahrhunderte alte Graf Dracula führte seine jungmädchenhafte Draculine aus. Das war schon was – und ich habe es genossen ... ebenso wie er. Was in dem nicht noch alles verborgen ist? Wie scharf der auf mich wird, wenn ich ihm nur mit meiner Kapuze bekleidet die seine überziehe ... und die Frühlingsficks auf dem Ergosit werden einmal variiert werden müssen. Wie plötzlich sein Muskelfleisch unter meinen Zähnen nachgab und sich mit dem Geschmack frischen Blutes mischte, das sich über meinen Mund verteilte und synchron zu seinem Erguss in mir von ihm abgeleckt wurde: Lebens- und Zeugungssaft in einem Akt vereint ... Sollte ich ihn nicht einmal sein gutes Stück in mein Blut tauchen lassen? Er scheint allzeit bereit zu sein und ich menstruiere gerade ...

15. Mai: Mein Optimierungsvorhaben passt besonders gut in die Ökonomie. Warum hatte ich daran nicht schon früher gedacht? Bert hat mir einige Empfehlungen gegeben: Schumpeters *Geschichte der ökonomischen Analyse* wird mir erschöpfend die Zusammenhänge nahebringen. Und die Besonderheiten der Finanzmärkte sind in den *CAPITAL IDEAS* Bernsteins zu finden. Neben der Sekundärliteratur geht aber nichts über das Studium der Originalarbeiten: Bachelier 1900: *Theory of Speculation*, Itô 1951: *On Stochastic Differential Equations*, Osborne 1959: *Brownian Motion in the Stock Market*, Mandelbrot 1963, 1967: *The Variation of Certain (and Some Other) Speculative Prices*, Merton 1973: *Theory of Rational Option Pricing*, Black, Scholes 1973: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*.

Bacheliers *Law of Radiation (or Diffusion) of Probability: Each price radiates during an element of time towards its neighbouring prices a quantity of probability proportional to the difference in their probabilities*: Mit  $p = dP/dx$  als Wahrscheinlichkeitsdichte des

Preises  $x$  zur Zeit  $t$  folgt mit dem Proportionalitätsfaktor  $c$  die Wärmeleitungsgleichung für die Preiswahrscheinlichkeit  $P$  einer Option:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Die Fundamentallösung dieser Gleichung lässt die einer Gaußverteilung folgenden Preisschwankungen mit der Zeit größer werden, so dass die hoch aufragende Kurve stetig breiter und flacher wird. Dem fairen Spiel folgend, halten Angebot und Nachfrage zu jedem Preis einander die Waage: *The mathematical expectation of the speculator is zero*. Damit hat Bachelier bereits die später sogenannte Hypothese vom effizienten Markt vorweggenommen.

Osborne bezieht sich neben der statistischen Mechanik auf das Weber-Fechnersche Gesetz der Psychophysik und wandelt den stochastischen Prozess zur geometrischen Brownschen Bewegung ab: *It is shown that common-stock prices, and the value of money can be regarded as an ensemble of decisions in statistical equilibrium, with properties quite analogous to an ensemble of particles in statistical mechanics*. Nach Weber-Fechner besteht ein logarithmischer Zusammenhang zwischen Signalgröße und Empfindungsstärke. *Under the hypothesis of the Weber-Fechner law, gains are measured by changes in logarithm of price, or logarithm of the number of shares*. Hat Osborne nach Daniel Bernoullis Hypothese vom zusätzlichen Nutzen eines Wertzuwachses und Gossens Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen einen dritten Schritt auf dem Weg in die Verhaltensökonomie getan, erweitert Mandelbrot die Untersuchungen in den 1960er Jahren um die fraktale Geometrie und Lévy stabile Verteilungen. Dabei analysiert er im Detail die Preisbildung in ausgewählten spekulativen Märkten und findet die ihnen zu Grunde liegenden stochastischen Prozesse in fraktionalen Brownschen Bewegungen und Lévy Flügen.

Lemma von Itô: Sei  $F = F(S, t)$ , wobei  $S$  mit  $dS = a(S, t)dt + b(S, t)dW_t$  einem allgemeinen Itô-Prozess gehorcht. Dann gilt für die Änderungen von  $F$  der Zusammenhang:

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + a(S, t) \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt + b(S, t) \frac{\partial F}{\partial S} dW_t$$

Wenn der Aktienkursprozess  $S$  durch die Geometrische Brownsche Bewegung gegeben ist:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t \Leftrightarrow d(\ln S) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t$$

Dann folgt der Prozess der logarithmischen Aktienkurse einem verallgemeinerten Wienerprozess mit konstanter Drift  $\mu - \sigma^2/2$  und Standardabweichung  $\sigma$ . Sei  $F(S, t)$  der Preis der Option. Für den Ausführungszeitpunkt  $t = T$  gilt:  $F(S, t) = (S - B)^+$  bzw.  $F(S, t) = (B - S)^+$  für einen call bzw. put. Was ist aber der Wert der Option für die Zeitpunkte  $0 \leq t \leq T$ ? Eine Antwort liefert die Lösung des Black-Scholes-RWPs z.B. für eine europäische call-Option:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + rS \frac{\partial F}{\partial S} - rF = 0$$

Wobei  $r \geq 0$ ,  $0 \leq S < \infty$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $F(t = T) = (S - B)^+$ . Durch geeignete Transformationen geht das RWP für den europäischen call in ein AWP der Wärmeleitungsgleichung über. Sei

$$F(S, t) = e^{(-\frac{1}{2}(q-1)x - \frac{1}{4}(q+1)^2\tau)} y(x, \tau), \quad S = e^x, \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), \quad q = \frac{2r}{\sigma^2}$$

Dann ist das Black-Scholes-RWP für einen europäischen call äquivalent zu dem AWP der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad y(x, \tau = 0) = y_0(x) = \left( e^{\frac{x}{2}(q+1)} - e^{\frac{x}{2}(q-1)} \right)^+, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

Mit  $y(x, \tau) = y_0(x) \gamma(x, \tau)$  und der Fundamentallösung:

$$\gamma(x, \tau) = \frac{e^{-x^2/4\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}}$$

folgt daraus mit der Standardnormalverteilung  $\Phi(x)$ :

$$y(x, \tau) = e^{(\frac{1}{2}(q+1)x + \frac{1}{4}(q+1)^2\tau)} \Phi(d_1) - e^{(\frac{1}{2}(q-1)x + \frac{1}{4}(q-1)^2\tau)} \Phi(d_2)$$

Darin bedeuten:

$$d_{1/2} = \frac{\ln(S/B) + (r \pm \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Als Lösung für die europäische call-Option ergibt sich für  $S > 0$ ,  $0 \leq t < T$ :

$$F(S, t) = S\Phi(d_1) - Be^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

Aufgrund der *fat tails* infolge faktisch großer Schwankungsbreiten tendiert das Modell von Black und Scholes zur Unterbewertung von Optionen. Abhilfe verspricht die *Tsallis-Verteilung*, mit der auch *fette Schwänze* modelliert werden können. Als Verallgemeinerung der Boltzmann-Verteilung führt Tsallis 1988 mit Blick auf eine *nichtextensive* statistische Mechanik folgende Verteilung ein:

$$F = \frac{1}{Z} (1 - (1 - q)\beta H)^{\frac{1}{1-q}} \Rightarrow F = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \quad q = 1$$

Für die nichtextensive Entropie  $S_q(A, B)$  eines aus  $A$  und  $B$  zusammengesetzten Systems gilt mit  $\beta = 1/kT$ :  $S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)k^{-1}S_q(A)S_q(B)$ . In ihrer *Theory of Non-Gaussian Option Pricing* verwendet die Haken-Schülerin Lisa Borland 2002 die Tsallis-Verteilung zur Berücksichtigung der *fat tails* in der Black-Scholes-Gleichung. Aus dem empirischen Abgleich mit Börsendaten erhält sie einen Wert von  $q \approx 1,4$ . Der nichtgaußsche Tsallis-Ansatz für eine statistische Rückkopplung:

$$dS = \mu S dt + \sigma S d\Omega, \quad d\Omega = P(\Omega)^{\frac{1-q}{2}} d\omega, \quad P(\Omega) = \frac{1}{Z(t)} \left( 1 - (1 - q)\beta(t)\Omega^2 \right)^{\frac{1}{1-q}}$$

führt sie auf eine verallgemeinerte Black-Scholes-Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_q^{1-q} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + rS \frac{\partial F}{\partial S} - rF = 0$$

Neben dem Volatilitätsparameter  $\sigma$  und dem *Schwanzparameter*  $q$  bestimmt Lisa 2004 noch einen *Schiefeparameter*  $\alpha \leq 1$  im Wahrscheinlichkeitsmaß der Fluktuationen:

$$\sigma S^\alpha P^{\frac{1-q}{2}} d\omega$$

Der Abgleich des Wahrscheinlichkeitsmaßes mit den tatsächlichen Fluktuationen ergibt folgende Parameterwerte:  $1, 2 \leq q \leq 1, 4$ ;  $0, 2 \leq \alpha \leq 0, 5$ ;  $\sigma = 30\%$ .

Im Gegensatz zu den Physikern Osborne, Black und Borland bezieht sich der Mathematiker Mandelbrot nicht auf die statistische Mechanik der Physik. Stattdessen bedient er sich seiner fraktalen Geometrie und greift auf den Wahrscheinlichkeitskalkül Lévy's von 1925 zurück. Nach Lévy lässt sich die Klasse der stabilen Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $\phi(q)$  für  $\alpha \neq 1$  durch folgende charakteristische Funktion darstellen:

$$\ln\phi(q) = i\mu q - \gamma|q|^\alpha \left( 1 - i\beta \frac{q}{|q|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right)$$

Darin ist  $\mu$  eine reelle Zahl,  $\gamma$  ein positiver Skalenfaktor,  $\beta$  ein Asymmetrie-Parameter im Bereich  $-1 \leq \beta \leq 1$  und  $0 < \alpha \leq 2$ . Für  $\alpha = 1$  gilt:

$$\ln\phi(q) = i\mu q - \gamma|q| \left( 1 + i\beta \frac{2q}{\pi|q|} \ln|q| \right)$$

Lévy stabile Verteilungen lassen sich nur für einige spezielle Parameter in eine analytische Form bringen:  $\alpha = 2$  liefert eine Gaußverteilung,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  ergibt die Lorentzkurve oder Cauchy-Verteilung und  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 1$  führt auf die Verteilung von Lévy und Smirnov. Die charakteristischen Funktionen sind als Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsdichten definiert. Ihre analytische Form für die Lorentz- und Gaußverteilung folgt dem gleichen Ausdruck:

$$\phi(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha}$$

Lévy stabile Verteilungen können nur in wenigen Spezialfällen durch Verteilungen mit beschränkten Varianzen und *schlanken Schwänzen* angenähert werden. Nach Mandelbrot folgen die den spekulativen Märkten zu Grunde liegenden stochastischen Prozesse eher den Lévy Flügen als den Brownschen Bewegungen und sind ihnen beim Berechnen der Kursentwicklungen vorzuziehen, auch wenn keine Auswertungen analytischer Ausdrücke mehr möglich sind, sondern langwierige numerische Computersimulationen erforderlich werden. Das ist ähnlich wie bei der Wettervorhersage und der Prognose von Naturkatastrophen. Und so ist es kaum überraschend, dass es dem Geophysiker Sornette immer wieder gelungen ist, die Kurseinbrüche auf den spekulativen Märkten vorherzusagen. Das gelang ihm 1987 und 1997/99 ebenso wie 2007. Mit diesen faszinierenden Zusammenhängen muss ich mich unbedingt näher beschäftigen! Mechanische Entspannungen nach dem Aufeinandergleiten der vom Magma getriebenen Krustenplatten lösen ein Erdbeben aus, das eine Riesenwelle zur Küste treibt, die dort viele Touristen tötet. Im indischen Ozean gibt es bereits ein Vorwarnsystem: wie funktioniert es? Aber warum leben überhaupt so viele Menschen an gefährdeten Orten? Auch Naturkatastrophen sind weitgehend menschengemacht. Und



wie funktioniert die satellitengestützte Vorhersage von Monsterwellen? Susanne Lehner hat im Rahmen des WaveMax-Projektes an der DLR innerhalb weniger Monate dutzende von Monsterwellen ausfindig gemacht. Worin genau unterscheiden sich die Simulationen von Tsunamis und Monsterwellen? Folgen beide der NLS?

Worin genau gleichen sich die charakteristischen Muster in den Messreihen, die den Erdbeben und den Kurseinbrüchen voran gehen? Und was sind die Invarianten? In der Physik ist es die Erhaltungsgröße Energie, in der Ökonomie der invariante Wert (wie der alte Mann nicht müde wird zu wiederholen). *Noise makes financial markets possible, but also makes them imperfect*, schreibt Black 1986: *The price of a stock reflects both the information that information traders trade on and the noise that noise traders trade on*. Bestimmt die Information den Trend und das Rauschen die Schwankungen darum? So wie in der Fokker-Planck-Gleichung zur Beschreibung der Evolution? *The price of a stock will tend to move back toward its value over time. So, long run prices are efficient but short run prices need not be*. Im Gegensatz zu den Werten, sind die Preise leicht messbar. Auch die Energie ist nur indirekt messbar, aber genau definiert. Eine Definition des Wertes gibt Black nicht. Beim Aufschaukeln einer Monsterwoge aus den Einzelwellen bleibt die Energie natürlich erhalten, so dass die Nebenwellen im gleichen Maße Energie verlieren und kleiner werden wie die sich auftürmende Monsterwoge Energie gewinnt. Aber wie geht es bei den sich aufblähenden Spekulationsblasen zu? Werden die wenigen Großanleger nur auf Kosten der vielen Kleinanleger reich, so dass der reale Wert erhalten bliebe? Oder werden virtuelle Werte geschaffen, ähnlich den kurzzeitig über dem Nullpunktsfeld fluktuierenden virtuellen Teilchen in der Physik? In der Quantenmechanik gibt es nach Maßgabe der linearen Schrödinger-Gleichung einen Erhaltungssatz für die Wahrscheinlichkeit. Und die Logik dient der Wahrheitserhaltung, indem mit ihr die Wahrheit der Prämisse auf die Konklusion übertragen werden kann ...

Warum bin ich von der Physik zur Logik gekommen? Weil ich mich bisher noch gar nicht näher mit Gödels Originalarbeiten zu seinen Unvollständigkeitssätzen beschäftigt habe? Wollte Bert mit dem Hinweis auf die schwarzen Löcher in der Raumzeit darauf anspielen? In der Raumzeit breiten sich gemäß Einstein-Gleichung Gravitationswellen aus, die auch nichtlinear sein müssten wie die Wasserwellen. Damit gibt es die Wahrscheinlichkeitswellen der Quantenmechanik als Lösung der linearen Schrödinger-Gleichung, die Raumzeitwellen folgen aus der Einstein-Gleichung der Gravitationstheorie, die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik lassen auf Lichtwellen schließen und die Schallwellen, Wasserwellen, Erdwellen genügen der Newtonschen Mechanik und beschreiben Wellen in den klassischen Elementen Luft, Wasser, Erde, Feuer bzw. Licht, Wärme, Energie. Die Lorentzgleichung steht für die Kopplung von Mechanik und Elektrodynamik und das Plancksche Gesetz der Schwarzkörperstrahlung verbindet Licht und Wärme. Aber gibt es Wärmewellen? Das wird Bert wissen. Und Wahrheitswellen? Wären das nicht eher Hirnstromwellen als Wahrscheinlichkeitswellen? Und Wertewellen, die in der Gesellschaft, wie in der Synergetik von Haken ausgeführt, zu Moden versklavt werden? Oder folgt der Wert ebenso wie die Energie einem Variationsprinzip? Dann müsste es analog zu den fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur, eine Invarianten- oder Eichtheorie der die Gesellschaft basierenden Interaktionen geben. Ist Gerhard Mack der Einzige, der

damit begonnen hat? Wenn ich mit Callahans: *The Geometry of Spacetime* durch bin, werde ich mich der *Eichfeldtheorie* Helga Baums widmen, in der sie eine *Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln* verspricht.

Mit Thales beginnt das rationale Zusammendenken von Kosmologie und Lebenswelt. Er bestimmt das Wasser als den stofflichen Anfangsgrund, als *die* materielle *arché* der Welt. Klaus Held schreibt in seiner *Phänomenologie der natürlichen Lebenswelt* dazu: *Die eigentliche arché ist die phýsis. In der Wandlungsfähigkeit, die das Wasser auch ohne unsere Einwirkung aufweist, verkörpert sich stofflich die Lebendigkeit der phýsis.* Anhand der babylonischen Keilschrifttafeln sagt Thales im Jahr  $-585$  erstmals den genauen Ort und die Zeit einer Sonnenfinsternis voraus und nach Aufzeichnung von Wetterdaten spekuliert er mit einem Optionsgeschäft auf die zu erwartende Olivenernte. Heute gehören Wetterderivate zum festen Bestandteil von Spekulationsgeschäften an den Terminbörsen und verbinden in besonderer Weise Physik mit Ökonomie.

Als Mathematiker ist Thales mit folgenden Sätzen in die Geschichte eingegangen:

1. Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich.
2. Die Scheitelwinkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden sind gleich.
3. Ein Dreieck ist durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt.
4. Der Durchmesser halbiert den Kreis.
5. Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich und halbieren einander.
6. Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter.

Ein Rechteck mit Umkreis veranschaulicht die meisten Zusammenhänge. Das wird ein schönes Symbol in meinem Comic abgeben. Daran anschließend die Ellipse des heliozentrischen Weltbildes bei Hypatia. Bei Sonja dann die partiellen Differentialgleichungen aus der Analysis: d'Alemberts Wellengleichung und Fouriers Wärmeleitungsgleichung. Der Weg von der Geometrie mit Zirkel und Lineal reicht über die von Descartes arithmetisierte Geometrie bis hin zu Gaußens Differentialgeometrie. Er führt nicht nur Analysis und Geometrie zusammen, sondern auch Astronomie und Stochastik. Schon Thales befließigt sich der Mutmaßungskunst, aber erst Jakob Bernoulli entwickelt sie in seiner Abhandlung *ars cojectandi sive stochastice* zu einer mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeit, wenn er schreibt: *Irgend ein Ding vermuthen heisst so viel als seine Wahrscheinlichkeit messen.* Dabei ist ihm *die Wahrscheinlichkeit ein Grad der Gewissheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen.* Ob Thales sich schon Gedanken über den Ausgang von Glücksspielen gemacht hat, wissen wir nicht. Bei Bernoulli kommen jedenfalls statistische Prognosen über den Ausgang von Glücksspielen zusammen mit Vorhersagen sozialer Phänomene und natürlicher Ereignisse. Und was heißt das für meine *Lenz*? Sie sollte zum Zeitpunkt der Tag-Nacht-Gleiche mit dem Frühlingsbeginn gezeugt und während der Wintersonnenwende geboren werden. Damit träten die mit den Reifeteilungen, der Zeugung und Embryonalentwicklung verbundenen Zufallsereignisse in Koinzidenz mit determinierten Konstellationen auf der Umlaufbahn unseres Planeten, um deren Periodizität mit den Jahreszeiten die Wetterphänomene schwanken: Stochastische Prozesse unterliegen allen irdischen Lebenserscheinungen. Und so werde ich meinem alternden Lehrer am Mittwochabend einen ungewöhnlichen Empfang bereiten und gespannt darauf sein, wie er reagieren wird ...

17. Mai: Vatertag. Was für eine Lust! Was für eine Angst! Zum Glück hat der alte Sack überlebt. Ruhig atmend liegt er da. Wiederbelebt, umsorgt und – eingeschläfert wie ein Kind. Warum ziert er sich so, noch einmal Vater zu werden? Angesichts seiner absehbaren Lebenserwartung könnte es ihm ziemlich egal sein; wenn ihm die Zweckdienlichkeit des Vögels nicht zuwider wäre. Und warum gehe ich ihn so hart an? Weil er sich widerständig gezeigt hat? Übertrage ich auf ihn die Rachlust auf meinen Vater? Die mit den Halsschlingen gefesselten Hände waren keine gute Idee – aber wirksam. Meine überschäumende Geilheit: woher rührte sie? Und dieser finale Ganzkörperorgasmus mit seinem rauschhaften Krampfen und Strecken überall! So eine innervierende Projektion bis in die feinsten Verzweigungen hinein, habe ich noch nicht erlebt. Als ob mein ganzer Körper Instrument der Lust war. Was für phantastisch orchestrierte Melodien und Kanones, Bassläufe und Paukenschläge all seine Sinne spielten! Und der alte Mann? Vielleicht war es nicht sein erstes Erleben beginnenden Sterbens. Ich werde ihn in nächster Zeit darauf ansprechen. Mein Geburtstagsgeschenk dürfte ihn auf jeden Fall entschädigen. Da kann er seine Altersgeilheit einmal so richtig ausleben an einem jungen Ding. Sollte ich mich nicht zu ihm legen und seine Träume versüßen? Wahrscheinlich ist ihm vorerst nicht mehr nach Sex mit mir zumute, jedenfalls nicht zu meinen Bedingungen. Ich werde lieber das Notebook, den Risiken und die Filme mit ins Bett nehmen. Dazu waren wir nicht mehr gekommen. Warum eigentlich? Welche Spontaneität modulierte unseren Plan? ... Die Fesseln! Fesseln tönnen mich ähnlich an wie Kapuzen. Wahrscheinlich wurde ich als Kind von beiden im direkten oder assoziativen Zusammenhang geprägt. Über den Täter die Kapuze und die Fesseln für das Opfer. So war es auf dem Ergosit. Aufgespießt wie vom Einhorn. DAS IST ES!! Das Bild der spitz auslaufenden Henkerskapuze und das spitze Horn überdecken sich mit einem Lustgefühl des Aufgespießtwerdens, das ich immer wieder zu reproduzieren habe. Aber woher rührt es? Gibt es eine Urszene? Die Bestie, die ihr Horn in die Schöne spießt? Der Henker unter seiner Kapuze, der auf der Folterbank die gefesselte Hexe fickt? Der schwarz ver mummt Pfaffe, der im Keller das bleiche nackte Mädchen vergewaltigt? Habe ich als Kind bloß eine illustrierte Ausgabe de Sades gelesen oder ist es mir selber passiert im Regensburger Dom? Was für eine schöne Horrorszene! Die werde ich sofort als Comic skizzieren ...

25. Mai: Sex and Math and Comic Strips: Mit allem komme ich gut voran. Beim Sex wird der Höhepunkt schon bald erreicht sein mit der Feier zum 2596sten Jahr nach der erstmals vorhergesagten Sonnenfinsternis. Ich werde meinen alten Gönner wohl hinreichend provoziert haben, damit er zum Eintritt in die 1661 aus meinem Angebot etwas machen wird. Eigentlich habe ich ihm genügend Hinweise gegeben. Und danach wird er sich mit dem Gedanken vertraut machen müssen, dass ich von ihm geschwängert worden bin. Der Beweis steht zwar noch aus, aber gefühlt bin ich mir ziemlich sicher, warum weiß ich nicht. Mit meinem Austritt aus der 1661 werde ich bereits Mutter geworden sein. Ob es ein Thales oder eine Hypatia werden wird, habe ich nicht im Gefühl. Ich werde es auch nicht ermitteln lassen können, ohne Gefahr zu laufen, entdeckt zu werden. Das macht es umso spannender. Die antiken Griechen mussten sich ebenfalls jedesmal überraschen

lassen. Junge oder Mädchen, das ist hier die Frage. Zum Geburtstag meines Lehrers und den Umständen unseres Kennenlernens passt eigentlich nur ein Thales.

Die Eichtheorien beginnen mit Weyl. In *Raum, Zeit, Materie* schreibt er einleitend: *Das Buch ging aus Vorlesungen hervor, die ich im Sommersemester 1917 an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich gehalten habe, und erschien zum ersten Male im Frühjahr 1918. Es lockte mich, an diesem großen Thema ein Beispiel zu geben für die gegenseitige Durchdringung philosophischen, mathematischen und physikalischen Denkens.* Einstein war seit 1914 in Berlin und hatte dort sein Jahrtausendwerk, die Allgemeine Relativitätstheorie, vollendet. Seine zusammenfassende Arbeit: *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie* erschien 1916 in den Annalen der Physik. Am Anfang steht ein schlichtes Postulat: *Die allgemeinen Naturgesetze sind durch Gleichungen auszudrücken, die für alle Koordinatensysteme gelten.* Im Vergleich mit der Poissonschen Gleichung der Newtonschen Gravitationstheorie sind der Laplace-Operator durch den Einstein-Tensor und die Materiedichte durch den Energietensor zu ersetzen. Und wie es sich für eine gute physikalische Theorie gehört, ist die ART nicht nur logisch konsistent und mathematisch richtig, sie hat auch überprüfbare Konsequenzen: *Wir untersuchen nun die Beeinflussung, welche die metrischen Eigenschaften des Raumes durch das Feld der Masse  $M$  erfahren: Der Einheitsmaßstab erscheint verkürzt, die Uhr läuft langsamer, Lichtstrahlen werden gekrümmt, Bahnellipsen unterliegen einer Drehung. Liegt der Einheitsmaßstab auf der  $x$ -Achse, so folgt in erster Näherung:*

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad \alpha = \frac{\kappa M}{8\pi} \Rightarrow g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \Rightarrow dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}$$

$\kappa$  steht für die Gravitationskonstante. *Es werde ferner die auf die Zeitkoordinate untersuchte Ganggeschwindigkeit einer Einheitsuhr untersucht, welche in einem statischen Gravitationsfelde ruhend angeordnet ist:*

$$ds = 1 \Rightarrow dx_4 = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2} \Rightarrow dx_4 = 1 + \frac{\kappa}{8\pi} \int \frac{\rho d\tau}{r}$$

*Wir untersuchen ferner den Gang der Lichtstrahlen im statischen Gravitationsfeld. Seine Biegung  $B$  ist in genügender Näherung gegeben durch:*

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0 \Rightarrow B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\kappa M}{4\pi\Delta}$$

*Ein an der Sonne vorbeigehender Lichtstrahl erfährt demnach eine Biegung von  $1,7''$ . Berechnet man das Keplerproblem um eine Größenordnung genauer als Newton, so erhält man eine Abweichung von folgender Art. Die Bahnellipse eines Planeten erfährt in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung vom Betrage*

$$\varepsilon = 24 \pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

*pro Umlauf. Die Rechnung ergibt für den Planeten Merkur eine Drehung der Bahn um  $43''$  pro Jahrhundert, genau entsprechend der Konstatierung der Astronomen. Und 1919*

wurde während einer Sonnenfinsternis die Biegung eines an unserem Zentralgestirn vorbeigehenden Lichtstrahls in Übereinstimmung mit der Rechnung gemessen. Hatte die mathematische Schönheit und Richtigkeit der ART Einstein bereits hinreichend berauscht, so war die empirische Bestätigung noch der Punkt auf dem i zur Wahrheit, der sein Fass der Glückseligkeit zum Überlaufen gebracht haben dürfte. Wäre er ebenfalls ein so skurriler Synästhetiker gewesen wie ich, ... ja, was dann? Wird es mir jemals so ergehen können und wie schon bei Thales und Einstein mit einer Sonnenfinsternis zusammenhängen? Da bin ich mal gespannt.

*Die Urform des Bewusstseinsstromes ist die Zeit*, schreibt Weyl im Anschluss an Kant, Brentano und Husserl. In seiner Naturphilosophie wird der Mathematiker geradezu pro-saisch: *Die objekte Welt ist schlechthin, sie geschieht nicht. Nur vor dem Blick des in der Weltlinie meines Leibes emporkriechenden Bewußtseins „lebt“ ein Ausschnitt dieser Welt „auf“ und zieht an ihm vorüber als räumliches, in zeitlicher Verwandlung begriffenes Bild.* Und Einstein hielt die Zeit bloß für eine Illusion ... des Bewusstseins eben. Bei Nash ist es genau umgekehrt. Seine hirngenerierten Figuren altern nicht. Die subjektive Welt ist absolut und bestimmt, die objektive Welt relativ und unbestimmt: Geist vs. Natur oder Mathematik vs. Physik. Ist die Außenwahrnehmung gestört, bleibt das Bewusstsein statisch. Sind Schizophrene die Gegenbeispiele dafür, dass nicht das Bewusstsein, sondern das Sein sich wandelt, trotz aller Invarianten? Das Hirn gibt nur den 25 Hz Takt vor, gleichsam die Schichtung im Bewusstseinsstrom, der genau genommen gar kein Strom ist, vielmehr aus schnell aufeinanderfolgenden Szenen von 40 ms Dauer besteht, ähnlich den Einzelbildfolgen im Film. Weyl fährt fort: *Reißen wir uns in der Reflexion heraus aus diesem Strom und stellen uns seinen Gehalt als ein Objekt gegenüber, so wird er uns zu einem zeitlichen Ablauf, dessen einzelne Stadien in der Beziehung des früher und später zu einander stehen.* Gemessen am Maßstab einer wohldefinierten, gleichförmigen Bewegung erfolgt der zeitliche Ablauf langsamer oder schneller. *Wie die Zeit die Form des Bewusstseinsstromes, so, darf man mit Fug und Recht behaupten, ist der Raum die Form der körperlichen Wirklichkeit.* Raum und Zeit als *Formen* aufzufassen bzw. vorzugeben, geht bis auf Aristoteles zurück. Die methodischen Konstruktivisten knüpfen demgegenüber an Plato an, wenn sie Raum und Zeit aus dem Alltagshandeln *ideieren*. Ob *Formen* oder *Ideationen*, Raum und Zeit bleiben Hirngespinnste, denen eine mathematische Struktur aufzuprägen ist. Davon handelt Weyls Buch. Der Übergang von der Euklidischen zur Riemannschen Geometrie beruht für ihn auf dem gleichen Gedanken wie die Nahwirkungsphysik: *Das Prinzip, die Welt aus ihrem Verhalten im Unendlichkleinen zu verstehen, ist das treibende erkenntnistheoretische Motiv der Nahwirkungsphysik wie der Riemannschen Geometrie.* Wie kommt man vom Bewusstsein zum Sein, von den Hirngespinnsten zur Wirklichkeit? *Bislang sind wir rein spekulativ vorgegangen und ganz in der Domäne des Mathematikers geblieben. Ein anderes ist aber die Widerspruchslosigkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie, ein anderes die Frage, ob sie oder die Euklidische Geometrie im wirklichen Raume Gültigkeit besitzt.* Darüber soll die Physik Auskunft geben können: *Es muss also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden.* Einsteins neue fundamentale, über Riemann hinausgehende physikalische

*Erkenntnis war die, daß sich in den Erscheinungen der Gravitation die Veränderlichkeit des metrischen Feldes kundgibt. Nach der analytischen Behandlung der Begriffe Metrik, metrischer Zusammenhang und Parallelverschiebung kommt Weyl zum „synthetischen“ Teil seines Buches, die der materiellen Erfüllung des Raumes Rechnung trägt. Dazu formuliert er zwei Postulate: I. Das Wesen des Raumes lässt jeden möglichen metrischen Zusammenhang zu. II. Der metrische Zusammenhang bestimmt eindeutig den affinen. Die beiden Forderungen erfordern den Beweis, daß aus ihnen die Existenz einer nichtausgearteten quadratischen Form folgt, welche bei den infinitesimalen Drehungen ungeändert bleibt. Siehe dazu: Die Einzigartigkeit der pythagoreischen Maßbestimmung, Math. Zeitschr. 12 (1922). Damit ist der Raum „von Natur“ aus mit einem affinen Zusammenhang ausgestattet:*

$$\Gamma_{r,ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \right) + \frac{1}{2} (g_{ir}\varphi_k + g_{kr}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r)$$

Invarianz findet statt gegenüber Koordinaten- und Eichtransformationen. Die ortsabhängige Funktion  $\varphi$  hat Weyl neu hinzugenommen, da jede Strecke  $l$  nur bis auf das beliebige Eichverhältnis  $\lambda l/l$  bestimmbar sei. Die *Eichinvarianz* von  $\varphi$  besteht dann in seiner Ersetzung durch:

$$\varphi_i - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$$

Im Anschluss an die näherungsweise Behandlung von Gravitationswellen bringt es die freie Koordinatenwahl für Weyl mit sich, daß man die *Gravitationspotentiale*  $\psi_k^i$  parallel mit den *Energie-Impulskomponenten der Nebenbedingung*

$$\frac{\partial \psi_k^i}{\partial x_k} = 0$$

*unterwerfen kann. Und er fährt fort: Durch Ausnutzung der Eichinvarianz kann man bewirken, daß die elektromagnetischen Potentiale parallel mit dem Strom der Nebenbedingung*

$$\frac{\partial \varphi_k^i}{\partial x_k} = 0$$

*genügen. Die Eichinvarianz steht demnach in ganz analoger Beziehung zum Erhaltungssatz der Elektrizität wie die Koordinateninvarianz zum Erhaltungssatz für Energie-Impuls. Die Eichpotentiale  $\varphi_k^i$  lassen sich mit den elektromagnetischen Potentialen identifizieren und für den Mathematiker Weyl war damit die „letzte Synthese“ von Raum, Zeit, Materie erreicht: Um den physikalischen Zustand der Welt an einer Weltstelle durch Zahlen charakterisieren zu können, muß nicht nur die Umgebung dieser Stelle auf ein Koordinatensystem bezogen werden, sondern müssen außerdem gewisse Maßeinheiten festgelegt werden. Die intellektuelle Leistung Weyls bleibt unbestritten; wenn es aber um den physikalischen Zustand der Welt geht, dann darf eine Theorie natürlich nicht der Erfahrung widersprechen. 1929 äußert sich Einstein Über den gegenwärtigen Stand der Feldtheorie wie folgt: Weyl würde sagen, Uhren und Massstäbe müssten erst als Lösungen auftreten; im Fundament der Theorie kommen sie nicht vor. Aber ich finde: Wenn das mit einer*

*Uhr (bzw. mit einem Massstab) gemessene ds ein von der Vorgeschichte, dem Bau und dem Material Unabhängiges ist, so muss diese Invariante in der Theorie als solche auch eine ganz fundamentale Rolle spielen. Wenn aber die Art des wirklichen Naturgeschehens nicht so wäre, so gäbe es keine Spektrallinien und keine wohldefinierten chemischen Elemente. Und Einstein schließt mit der Bemerkung: Jedenfalls bin ich mit Weyl überzeugt, dass Gravitation und Elektrizität zu einem Einheitlichen sich verbinden lassen müssen, nur glaube ich, dass die richtige Verbindung noch nicht gefunden ist.*

Wenngleich die Eichinvarianz in der ART vorerst nicht zum Zuge kommt, so passt sie doch vortrefflich zu einer anderen Theorie. F. London hat 1927 eine *Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl* vorgenommen. Darin schreibt er einleitend: *Man kann den Riemannschen Raumbegriff betrachten als die Aufhebung des Vorurteils, daß die Krümmungsverhältnisse an einer Stelle des Raumes verbindlich sein müßten für die Krümmung an allen anderen. Um dieser Aussage Riemanns einen Sinn zu geben, war zunächst die Annahme notwendig, daß der Maßstab, welcher an jeder Stelle zur Bestimmung der Koeffizienten  $g_{ik}$  der metrischen Fundamentalform*

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

*zur Anwendung gelangt, ein „starrer“ Maßstab sei. Demgegenüber macht Weyl mit Recht geltend, daß die Annahme eines solchen starren Maßstabes, einer radikalen Nahgeometrie zuwider sei, daß nur die Verhältnisse der  $g_{ik}$  an einer Stelle, nicht ihre Absolutbeträge, sinngemäß festgelegt werden können, und dementsprechend setzt er für die Änderung  $dl$  eines Eichmaßstabes von der Länge  $l$  bei einer infinitesimalen Verschiebung der  $dx^i$  an:*

$$dl = l\varphi_i dx^i$$

*wobei die Proportionalitätsfaktoren  $\varphi_i$  Funktionen des Ortes sind, Charakteristika der Maßverhältnisse des Raumes, ähnlich den  $g_{ik}$ . Da das Eichmaß in der Regel vom Weg abhängt, ist zu fordern, dass die Größen*

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}$$

*verschwinden und entsprechend auch ihre Divergenz. Die damit aufgedeckte formale Analogie zu den Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik legte es für Weyl nahe, die  $\varphi_i$  seien bis auf einen konstanten Proportionalitätsfaktor zu identifizieren mit den Komponenten  $\phi_i$  des elektromagnetischen Viererpotentials, die  $f_{ik}$  entsprechend mit den elektromagnetischen Feldstärken. In Analogie zur Wirkung der Gravitation auf die Krümmung des Raumes sollte sich der Elektromagnetismus in der Variabilität des Eichmaßes zeigen:*

$$l = l_0 e^{\alpha \int \varphi_i dx^i}$$

Mit  $\alpha$  als Proportionalitätsfaktor. Es ist schon bemerkenswert, wie weit Wunschenken gehen kann. Einstein konnte sich auf die empirische Gleichheit der trägen und schweren Masse stützen, Weyl hatte lediglich eine formale Analogie aufgedeckt, die keiner realen Wirkung des Elektromagnetismus entsprach. Und so geht London auch nicht weiter auf

Weyls Eichtheorie im Kontext des erweiterten metrischen Zusammenhangs ein; vielmehr radikalisiert er ihren Gehalt im Rahmen einer Vereinheitlichung in der 5. Dimension und ist der Ansicht, *daß man nämlich in ihr nichts geringeres als einen folgerichtigen Weg in die Undulationsmechanik zu erblicken hat.* In der Anwendung des Weylschen Raumbegriffs auf das Schrödingersche Kontinuum enthüllt sich nun ein einfacher Zusammenhang. Werde nämlich der Weylsche Maßstab  $l$  im Materiefeld  $\psi$  gerade mit der Gruppengeschwindigkeit herumgeführt, dann *wird Weyls Skalar  $l$  numerisch identisch mit dem de Broglieschen Feldskalar  $\psi$ .* London präzisiert seine Hypothese wie folgt:

$$\alpha = \frac{2\pi ie}{hc} \Rightarrow l = l_o \exp\left(\frac{2\pi i}{h} \int \frac{e}{c} \psi_i dx^i\right)$$

Im Anschluss an die fünfdimensionale Theorie Kleins, vergleicht London die Materiewelle  $\psi$  mit dem entlang der Strömung des Kontinuums geführten Weylschen Eichmaße:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1}{l_o} \exp \frac{2\pi i}{h} \left( \int \left( \frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \phi^i \right) dx^i + m_o c^2 \tau \right)$$

Mit  $\tau$  als Eigenzeit. Infolge der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung ist der Integrand  $= -m_o c^2$ , man erhält:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1}{l_o} \exp\left(\frac{2\pi i}{h} * const.\right) = const.$$

*Der physikalische Gegenstand ist gefunden, der sich so verhält wie das Weylsche Maß. Die komplexe Amplitude der de Broglieschen Welle; sie erfährt im elektromagnetischen Felde genau den Einfluß, welchen Weyl für sein Eichmaß postuliert hat. Wer hätte das gedacht? Aus Kaluza-Kleins fünfdimensionaler Vereinheitlichung von Graviton und Elektromagnetismus überträgt London die Eichidee auf die Phase der Materiewelle. Wie Straumann 1987 in den *Physikalischen Blättern* zum *Ursprung der Eichtheorien bei Hermann Weyl* schreibt, ließ der Mathematiker trotz aller Kritik seitens der Physiker nicht von seiner schönen Nahwirkungs-idee ab. Vielmehr „rettete“ er sie 1929 mit seiner Grundsatzarbeit: *Elektron und Gravitation* in die Quantenmechanik hinüber: *Die Diracschen Feldgleichungen für  $\psi$  zusammen mit den Maxwellschen Gleichungen für die vier Potentiale  $f_p$  des elektromagnetischen Feldes haben eine Invarianzeigenschaft, die in formaler Hinsicht derjenigen gleicht, die ich in meiner Theorie von Gravitation und Elektrizität vom Jahre 1918 als Eichinvarianz bezeichnet hatte; die Gleichungen bleiben ungeändert, wenn man gleichzeitig  $\psi$  durch  $\exp(i\lambda)\psi$  und  $f_p$  durch  $f_p - \partial\lambda/\partial x_p$  ersetzt, unter  $\lambda$  eine willkürliche Funktion in der vierdimensionalen Welt verstanden. Dabei ist in  $f_p$  der Faktor  $e/ch$  aufgenommen. Die Beziehung dieser „Eichinvarianz“ zum Erhaltungssatz der Elektrizität bleibt unangetastet. Es ist aber ein wesentlicher und für den Anschluss an die Erfahrung bedeutungsvoller Unterschied, dass der Exponent des Faktors, den  $\psi$  annimmt, nicht reell, sondern rein imaginär ist.  $\psi$  übernimmt jetzt die Rolle, welche in jener alten Theorie das Einsteinsche  $ds$  spielte. Wie schon London vermutete, ist das elmag. Feld kein notwendiges Begleitphänomen des Gravitationsfeldes, sondern des durch  $\psi$  dargestellten Wellenfeldes. Weyl kommt zu dem Schluss: *Aus der Unbestimmtheit des Eichfaktors in  $\psi$***



ergibt sich die Notwendigkeit der Einführung der elektromagnetischen Potentiale. An die Stelle des Maßstabsfaktors tritt der Phasenfaktor:

$$\exp\left(\int_{\gamma} A\right) \rightarrow \exp\left(i \int_{\gamma} A\right)$$

Aus der Eichgruppe  $\mathfrak{R}$  wird  $U(1)$ . Unter dem Titel *Quantenphysikalischer Ursprung der Eichidee* kommt Bopp 1983 auf Weyls Eichidee zurück. Mit ihr sieht er die *Vollendung von Newtons wissenschaftstheoretischem Programm der mathematisierten Naturphilosophie* erreicht. *Durch die Eichidee kommen nämlich zu Newtons Prinzipien solche hinzu, welche Wechselwirkungen abzuleiten gestatten.* Was schon London für die de Broglieschen Materiewellen zeigte, die der Schrödinger-Gleichung unterfallen, gilt ebenso für die Elektronenwellen, die der Dirac-Gleichung genügen. *Denn die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind nur bis auf willkürlich wählbare Paare komplex konjugierter Phasenfaktoren bestimmt. Da die Basisoperatoren ihre Eigenschaften bewahren sollen, muß eine realistische Theorie bei beliebigen Phasentransformationen invariant sein. Das ist ohne Einführung von Eichfeldern nicht möglich.* Damit sind Eichfelder in der Quantenphysik nicht nur möglich, sondern notwendig! Die Klasse aller äquivalenten Dirac-Gleichungen ist  $U(4)$  symmetrisch. *Somit ist die Klasse der physikalisch äquivalenten Diracgleichungen  $U(4)$  invariant.* Den 16 Parametern der  $U(4)$  entsprechend, tauchen die „Teilchen“ aus den 16 verschiedenartigen Linearkombinationen der Felder auf. Physikalische Teilchen sind die Repräsentanten der Darstellung einer mathematischen Gruppe, hier der  $U(4)$ . Davon hatte Bert schon gesprochen. Und was sind physische Teilchen?

Mit physischen Teilchen, wie z.B. winzigen harten Kugeln, rechnet Boltzmann, schreibt ihnen aber nur noch diskrete Energieniveaus zu. Und so ist die Diskretisierung ein Ausgangspunkt der Quantentheorie. Die Lorentz-Invarianz der SRT ist ein weiterer Ausgangspunkt, erfordert doch der Vierervektorformalismus für die Phase einer Materiewelle nicht nur eine frequenzproportionale Energie-, sondern ebenfalls eine wellenzahlproportionale Impulskomponente. Wird die Welle zudem einem elektromagnetischen Feld ausgesetzt, zieht die Gewährleistung der Ladungserhaltung die Eichinvarianz der Phase nach sich. In der Quantentheorie scheinen die Teilchen zu verschmieren, da ihre Orte nicht mehr gleichzeitig beliebig genau mit ihren Impulsen gemessen werden können. Aber genau genommen verschwammen die Teilchen schon bei Boltzmann, der nur noch ihre gemittelte und unkorrelierte Dichteverteilung betrachtete und dafür eine Evolutionsgleichung formulierte, die der Maxwell'schen Gleichverteilung zustrebte und dabei gemäß H-Theorem ein Funktional minimierte. In der Quantenfeldtheorie (QFT) wird der Atomismus diskreter Teilchen auf die Felder übertragen und mittels Eichinvarianz von der Quantenelektrodynamik (QED) der elektromagnetischen Wechselwirkung auf die QFTs der schwachen und starken Wechselwirkung ausgedehnt. Davon handelt Weinbergs Trilogie zur QFT. Riemann, Weyl und Einstein waren einen anderen Weg gegangen. Sie verfolgten das Nahwirkungsprinzip weiter, das zu einer Kontinuumstheorie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten führte, die Riemann erstmals am 10. Juni 1854 in seinem Habilitationsvortrag präsentierte unter dem Titel: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Weinberg parallelisiert dann wieder die Eichfelder der Teilchen mit den geometrischen Strukturen

der ART. Wird nämlich die Translationsinvarianz zur Eichinvarianz der Verschiebung umformuliert, entsprechen dem affinen Zusammenhang die Gravitationskräfte und den Metrikkoeffizienten die -potentiale. Die eichinvariante Bewegung einer Materieverteilung hat also die Existenz eines Gravitationsfeldes zur Folge, das auf sie zurückwirkt und die Äquivalenz von träger und schwerer Masse erzwingt. In der QED hat ganz analog ein eichinvarianter Elektronenstrom die Existenz elektromagnetischer Felder zur Folge, die über einem dem Äquivalenzprinzip entsprechenden Austauschstrom auf die Elektronen zurückwirken. Eichtheorien sind Wechselwirkungstheorien zwischen Materie und Feldern. Folgerichtig ist der Quantenfeldtheoretiker Weinberg in seiner Darstellung der ART nicht vom Relativitätsprinzip, sondern vom Äquivalenzprinzip ausgegangen.

Bert lässt Einstein in seinen *vergleichenden Betrachtungen* anheben mit einer grundsätzlichen Bestimmung der Wissenschaft: *Alle Wissenschaft, sei es Naturwissenschaft oder Psychologie, sucht in gewisser Weise unsere Erlebnisse zu ordnen und in ein logisches System zu bringen.* Und er fragt sich sogleich: *Wie hängen die geläufigen Ideen über Raum und Zeit mit dem Charakter unserer Erlebnisse zusammen?* Die erste Annäherung an die „Realität“ nimmt er aus dem „überpersönlichen Charakter“ einiger Erlebnisse an: *Jenen sinnlichen Erlebnissen verschiedener Individuen, welche einander entsprechen und demnach in gewissem Sinne überpersönlich sind, wird eine Realität gedanklich zugeordnet.* Wichtig dabei ist es dem Naturforscher Einstein, den Erfahrungsbezug der Begriffsbildungen im Auge zu behalten, auch wenn es sich um ordnendes Denken handelt: *Begriffe und Begriffssysteme erhalten die Berechtigung nur dadurch, daß sie zum Überschauen von Erlebniskomplexen dienen; eine andere Legitimation gibt es für sie nicht. Es ist deshalb nach meiner Überzeugung eine der verderblichsten Taten der Philosophen, daß sie gewisse begriffliche Grundlagen der Naturwissenschaft aus dem der Kontrolle zugänglichen Gebiete des Empirisch-Zweckmäßigen in die unangreifbare Höhe des Denknötwendigen (Apriorischen) versetzt haben.* Die weiteren Annäherungen an die Realität nimmt Einstein dann im Rahmen der Geometrie vor. Dabei ist es ihm wichtig, *den Grundbegriffen der Geometrie Naturobjekte zuzuordnen; denn ohne eine solche Zuordnung ist die Geometrie für den Physiker gegenstandslos. Für den Physiker hat es daher wohl einen Sinn, nach der Wahrheit bzw. dem Zutreffen der geometrischen Sätze zu fragen.* Innerhalb der jeweiligen Geometrie sei es bloß noch eine Aufgabe der Invariantentheorie, zu fragen, nach welchen Gesetzen sich aus gegebenen Tensoren neue bilden ließen. Wie in der Tabelle dargestellt, entstehen je nach „Invarianzforderung“ die jeweiligen Geometrien, die eine je verbesserte Zuordnung zu den Naturobjekten zulassen.

## Von der Erlebnisinvarianz zur Relativitätstheorie

Invarianz	Geometrie	Theorie
Erlebnisinvarianz	Anschauungsraum	Gesunder Menschenverstand
Galilei-Invarianz	Euklidische Geometrie	Newtonsche Mechanik
Lorentz-Invarianz	Minkowskische Geometrie	Spez. Relativitätstheorie
Einstein-Invarianz	Riemannsche Geometrie	Allgem. Relativitätstheorie

Die Invarianzforderungen sind das entscheidende Kriterium für den Strukturreichtum der Geometrie wie der physikalischen Theorie. Becher/Böhm/Joos beschließen in *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung* ihren kurzen geometrischen Exkurs mit einigen vergleichenden Bemerkungen: *Die Ähnlichkeiten zwischen der Geometrie der lokalen Eichsymmetrie und der Beschreibung von Raum und Zeit als Riemannsche Mannigfaltigkeit im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie sind offensichtlich. Es entsprechen sich:*

- der lokale Ladungsraum mit unitärer Struktur und der Tangentialraum mit lokaler Metrik und Lorentz-Koordinatensystemen,
- die Eichtransformationen und die allgemeinen Koordinatentransformationen,
- die Eichfelder, welche den Symmetriezusammenhang definieren und die Christoffel-Symbole, welche Parallelverschiebung von Tangentialvektoren beschreiben,
- die Feldstärke und der Krümmungstensor.

Mathematisch liegt diesen Entsprechungen die allgemeine Struktur eines Faserbündels zugrunde. Und darüber werde ich mehr in Helga Baums Eichfeldtheorie erfahren. Physikalisch hatten London und Weyl die Eichinvarianz von der Gravitations- auf die Quantentheorie übertragen: Die Schrödinger-Gleichung für ein Elektron der Masse  $m$  und Ladung  $e$  im elmag. Feld lautet:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left( -\frac{1}{2m} (\vec{\partial} - ie\vec{A}(x))^2 + eA^0(x) \right) \psi$$

Das elmag. Feld  $F$  folgt aus dem Viererpotential  $(A^0, \vec{A})$ :

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

Eine Eichtransformation des Potentials kann in der Schrödinger-Gleichung durch eine Eichtransformation der Wellenfunktion kompensiert werden:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x), \Rightarrow \psi'(x) = e^{ie\theta(x)} \psi(x)$$

Im Gegensatz zur Unvereinbarkeit der Weyl-Metrik mit der Erfahrung fixer Spektrallinien, gibt es in der Quantenmechanik den Aharonov-Bohm-Effekt, der besagt, dass die Materiewelle eines Teilchen auf dem Weg einer geschlossenen Schleife in einer eichfeldfreien Region eine Phasenverschiebung erfährt. Näheres dazu ist im *Compendium of Quantum Physics* zu finden, einem nützlichen Nachschlagewerk zu *Concepts, Experiments, History and Philosophy*.

Bert zitiert in seinem Essay *Zur Renaissance der klassischen Physik* Dirac, Feynman und Weinberg: Warum haben die fundamentalen Bausteine der Materie, die Fermionen, halbzahligen Spin? Für Dirac lag die Antwort auf diese Frage in der Forderung, dass die Wahrscheinlichkeit immer positiv sein müsse bzw.:  $\psi^* \psi \geq 0$ . Und warum gibt es überhaupt Bosonen und Fermionen? Weinberg stellt dazu folgende Plausibilitätsbetrachtung

an: First note that if two particles with momenta and spins  $p, \sigma$  belong to identical species  $n$ , then the state-vector  $\Phi(\dots p\sigma n \dots p'\sigma' n \dots)$  and  $\Phi(\dots p'\sigma' n \dots p\sigma n \dots)$  represent the same physical state; if this were not the case then the particles would be distinguished by their order in the labelling of the state-vector, and the first listed would not be identical with the second. Since the two state-vectors are physically indistinguishable, they must belong to the same ray, and so

$$\Phi(\dots p\sigma n \dots p'\sigma' n \dots) = \alpha_n \Phi(\dots p'\sigma' n \dots p\sigma n \dots)$$

where  $\alpha_n$  is a complex number of unit value. We may regard this as part of the definition of what we mean by identical particles. The crux of the matter is to decide on what the phase factor may depend. If it depends only on the species index  $n$ , then we are nearly done. Interchanging the two particles again, we find

$$\Phi(\dots p\sigma n \dots p'\sigma' n \dots) = \alpha_n^2 \Phi(\dots p\sigma n \dots p'\sigma' n \dots)$$

so that  $\alpha_n^2 = 1$ , yielding

$$\Phi(\dots p\sigma n \dots p'\sigma' n \dots) = \pm \Phi(\dots p\sigma n \dots p'\sigma' n \dots)$$

as the only two possibilities. Feynman schreibt in seiner Memorial Lecture zu Ehren Diracs: *If we insist that particles can only have positive energies, then you cannot avoid propagation outside the light cone. If we look at such propagation from a different frame, the particle is traveling backwards in time: it is an antiparticle. Then, looking at the idea that the total probability of something happening must be one, we saw that the extradiagrams arising because of the existence of antiparticles and pair production implied Bose statistics for spinless particles. When we tried the same idea on fermions, we saw that exchanging particles give us a minus sign: they obey Fermi statistics. The general rule was that a double time reversal is the same as a  $360^\circ$  rotation. This gave us the connection between spin and statistics and the Pauli exclusion principle for spin  $1/2$ .*

Was für weitreichende Konsequenzen so einfache wie plausible Annahmen zur Folge haben! Für Demokrit gab es nur die Atome und das Leere. In der QFT sind daraus identische Teilchen geworden, deren Zustandsvektoren einen Phasenfaktor von  $\alpha_n^2 = 1$  haben: es gibt Fermionen und Bosonen. Die Energie ist immer positiv:  $E \geq 0$ . Und die Zustands-Wahrscheinlichkeit ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = 1$$

Das „Leere“ gibt es nicht. Das Vakuum ist erfüllt von der dunklen Energie, dem Higgs-Feld und dem Nullpunktsfeld. Die 4 klassischen Elemente und die Phasenübergänge zwischen ihnen sind bis heute ein Rätsel geblieben. Nach wie vor fehlen die Beweise für die Existenz regulärer Lösungen der Navier-Stokes- und Euler-Gleichungen. Wie ich mich darauf freue, mit Birte die Details der Probleme bearbeiten zu können. Ich kann es kaum noch abwarten, bis es endlich August und sie hier bei mir sein wird! Und in der Mathematik? Für Pythagoras war alles Zahl. In der Algebra sind daraus die genau vier endlichen Divisionsalgebren

über den reellen Zahlen geworden. Ist damit alles Zahl? Gödel hatte die Unvollständigkeit der Arithmetik bewiesen und Cohen die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese. Und die genau 5 regulären Körper in den 3 Dimensionen der Euklidischen Geometrie sind in der Riemannschen Geometrie aufgegangen. Nach der Cartesischen Verbindung von Geometrie und Arithmetik, hatte Riemann die Synthese von Geometrie und Analysis erreicht. Und Nash gelang mit seinen *Real Algebraic Manifolds* der Brückenschlag von der Differentialgeometrie in die algebraische Geometrie: *Our first theorem asserts that any closed differentiable manifold can be displayed as a non-singular portion of a real algebraic variety.* Was für ein Höhenflug: *The existence of these algebraic models of differentiable manifolds suggested the formulation of an abstract concept of an differentiable manifold with an algebraic structure.* Auf dem Höhepunkt seines Schaffens löste Nash *The Embedding Problem for Riemannian Manifolds*, indem er die Frage beantwortete: *To what extent are the abstract Riemannian manifolds a more general family than the sub-manifolds of Euclidian spaces?* Hat sich mit der Euklidischen Geometrie auch die ideale Kugelform verflüchtigt? Mit dem Perelmanschen Beweis der Poincaréschen Vermutung ist sie in der Riemannschen Geometrie erhalten geblieben; denn eine dreidimensionale glatte, kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand einfach zusammenhängend, ist diffeomorph zur 3-Sphäre. Nash und Perelman griffen in ihren Beweisen auf die Boltzmann-Entropie zurück und verbanden damit ein physikalisches Konzept mit einer mathematischen Beweisidee! Das ist schon bemerkenswert. Was für ungewöhnliche Männer das sind bzw. waren. Boltzmann nahm sich selbst das Leben, Nash verbrachte 25 Jahre in der Psychiatrie und Perelman wohnt noch bei Mutti, die ebenfalls Mathematikerin ist. Da wird er in Ruhe und Geborgenheit seinen Studien nachgehen können. Was will ein Genie mehr? Die Million Dollar des Clay-Instituts hat er abgelehnt, ebenso die Fields-Medaille. Jetzt kommt die Kohle der Förderung von Jungforschern zu. Einfach großartig! Und wer weiß, vielleicht springt noch was für's BB-Team dabei heraus ... Wie schon Thales, hat sich auch Nash mit ökonomischen Problemen beschäftigt, dem Verhandlungsproblem und den nichtkooperativen Spielen, und eine Arbeit zum parallelen Rechnen veröffentlicht. Neben den drei Frauen Kovalevskaya, Noether und Synge-Morawetz werden die drei Männer Boltzmann, Nash und Perelman zur literarischen Verarbeitung und Comic-Gestaltung taugen. Und Birte hat ein Literatur-Projekt mit Einstein, Feynman und Witten begonnen. Dabei scheinen Physikerinnen noch seltener als Mathematikerinnen zu sein. Aber Curie, Meitner und Randall haben Bahnbrechendes zur Radioaktivität, Kernspaltung und dem Hierarchieproblem geliefert. Auf Seite der Mathematikerinnen hatte Bert von Yvonne Suzanne Marie-Louise Choquet-Bruhat gesprochen, einer französischen Mathematikerin, die über PDGLn und ART und speziell den Einsteinschen Feldgleichungen gearbeitet hat. Literarische Anverwandlungen der mathematischen Physik, wie sie Thomas Mann im *Doktor Faustus* mit Musik und Philosophie gelungen waren: das ist es, was ich mit Birte als Comic hinbekommen sollte. Sex and Math and Literature: so erotisch wie die *Lost Girls*, so mathematisch wie die *invarianten Variationsprobleme* und so literarisch wie Bert in seinen *Vergleichenden Betrachtungen* den *Doktor Faustus* dargestellt hat. Fehlen nur noch die neuzeitlichen Philosophen.

Manns Helden waren Schopenhauer und Nietzsche. Einstein und Weyl hatten selbst

Naturphilosophie betrieben, daran anschließend natürlich Lorenzen, der sich neben Kant hauptsächlich auf Brouwer, Weyl und Dingler bezog; aber auch auf Weinbergs *GRAVITATION AND COSMOLOGY* von 1972. In seiner *Revision der Einsteinschen Revision* führt er 1976 aus: *Die These, daß die Physik eine Revision der Geometrie und Kinematik erfordere*, ist bereits 1905 von Einstein aufgestellt worden und Lorenzen fragt sich einleitend, wie es dazu kommen konnte. Die Crux bei der Axiomatisierung der Geometrie war das Parallelenaxiom; denn die euklidischen Inzidenz- und Kongruenzaxiome erfordern lediglich die freie Beweglichkeit starrer Körper und liefern *eine Axiomatik der absoluten Geometrie, d.h. der Sätze, die auf Flächen beliebiger konstanter Krümmung gelten – und deshalb brauchte Euklid also noch ein Axiom, das die Krümmung Null auszeichnete*. Aber warum sollte der Raum eigentlich euklidisch sein? *Riemann hat das so formuliert, daß „das Prinzip der Maßverhältnisse“ – wir sagen heute „die Metrik“ – bei einer stetigen Mannigfaltigkeit anders woher kommen müsse*. Und er fügt hinzu: *Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen, durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese, durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet*. Einstein hat diese „Umarbeitung“ oder Revision dann geleistet, dem mathematischen Rahmen gleichsam einen physikalischen Inhalt eingefügt, die mathematische Geometrie durch eine physikalische ergänzt. Dabei war Einstein allerdings nicht von der Geometrie und Kinematik ausgegangen, sondern von der Maxwellschen Elektrodynamik. Nach Lorenzen treibt die einen aber nicht zwangsläufig zu einer Umarbeitung der Geometrie und Kinematik, sondern lediglich zu einer Revision der Newtonschen Grundgleichung für die Kräfte im Vierervektorformalismus. Die damit einhergehende Lorentz-Kontraktion und Einstein-Dilatation kann grundsätzlich in zweifacher Weise interpretiert werden: *Verkürzen sich die Körper oder haben wir es mit einer durch die Bewegung veränderten Längemessung zu tun? Verlangsamen sich die Vorgänge oder haben wir es mit einer durch die Bewegung veränderten Dauermessung zu tun?* Handelt es sich um reale oder Messeffekte? In der Gravitationstheorie verschärft sich das Problem; denn in der ART sind die Gravitationsfelder *keine Kraftfelder, sondern es wird zu jedem Punkt angegeben, durch welche Koordinatentransformationen man lokal ein Inertialsystem erhält*. In dieser von Weinberg als *heterodox* bezeichneten Interpretation, heißt der Fundamentaltensor  $g_{mn}$  zwar *Metrik*, dient aber durch seine Ableitungen dazu, *Transformationen auf lokale Inertialsysteme berechenbar zu machen*. Einstein glaubte, die Raum-Zeit-Geometrie umgearbeitet zu haben, nach Weinberg revidierte er vielmehr die Gravitationstheorie. Der Erfolg der Einsteinschen Revision, mit der ART die Geometrie und Kinematik umgearbeitet zu haben, geht für Lorenzen hauptsächlich auf die wohl aus der Landvermessung stammende Ansicht Riemanns zurück, nach der „die Maßverhältnisse woanders her kommen müssten.“ Mathematik und Physik bleiben also weiterhin schön getrennt, auch wenn Einstein sich darüber empörte, dass Philosophen Anschauungsformen ins unantastbar Apriorische erhoben hätten. Und ist es in der QFT nicht ganz ähnlich wie in der ART? Wird nicht die mathematische Struktur der Faserbündel nur verschieden interpretiert?

Das Rätsel der dunklen Energie ist noch ungelöst. Dafür ist das Nullpunktsfeld in Verbindung mit dem Casimir-Effekt nachgewiesen worden und das Higgsboson steht kurz

davor, mit hinreichendem Vertrauensbereich gemessen zu werden. In seiner Lehrbuch-Trilogie *THE QUANTUM THEORY OF FIELDS* behandelt Weinberg den Higgsmechanismus in *Volume II Modern Applications* in den Kapiteln 19.2: *Goldstone Bosons* und 21: *Spontaneously Broken Gauge Symmetries: In the case of spontaneously broken continuous symmetry there is a theorem, that the spectrum of physical particles must contain one particle of zero mass and spin for each broken symmetry*. Dieses erstmals von Goldstone 1961 bewiesene Theorem gilt allerdings nicht für alle Symmetrien: *the Goldstone bosons are absent where the broken symmetry is local, rather than global. Instead, these degrees of freedom show up as the helicity zero states of the vector particles associated with the broken local symmetry, which thereby acquire a mass. This phenomenon, now generally known as the Higgs mechanism ...* Weichert führt in seiner *Higgs-Phänomenologie* das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung am Higgs-Kibble-Modell vor: der Kopplung eines komplexen Skalarfeldes  $\phi$  an das elmag. Feld  $F$  und der Lagrangedichte

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\phi^*D^\mu\phi - V(\phi)$$

mit dem skalaren Potential:

$$V(\phi) = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$$

und der kovarianten Ableitung:

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$$

Invarianz unter lokaler U(1)-Transformation:

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

Es ist  $\lambda > 0$  zu wählen, damit  $V$  nicht divergiert und  $\mu^2 < 0$ , damit  $V$  neben dem relativen, labilen Maximum am Nullpunkt noch ein stabiles Minimum in der komplexen Ebene aufweist. Die um dieses Minimum entwickelte Symmetriebrechung ergibt einen Vakuumerwartungswert von

$$Erw(\phi) = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}}$$

Werde nun  $v = \sqrt{2} Erw(\phi)$  gesetzt und das Minimum von  $\phi$  entwickelt zu

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \phi_1(x) + i\phi_2(x))$$

folgt für die Lagrangedichte nach unitärer Eichung bis auf die Wechselwirkungsterme:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - v^2\lambda\phi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2$$

Und heraus kommt ein Photon mit der Masse  $ev$  von  $e\lambda/\mu^2$ , ein skalares Teilchen  $\phi_1$  mit Masse  $\sqrt{-2\mu^2}$  und ein skalares masseloses Teilchen  $\phi_2$ . Das freie Higgsfeld wird vorhergesagt, die Masse des Higgsbosons ist ein durch das Experiment zu bestimmender Parameter. Analog dazu, nur ein wenig komplizierter, funktioniert der Higgs-Mechanismus im

Standard-Modell. Die Freude an der Detailarbeit werde ich mir für Birte aufsparen, ebenso die Kritik daran. Holger Lyre fragt sich 2008: *Does the Higgs Mechanism Exist?* Naturphilosophen plagen noch immer Zweifel an der verborgen angenommenen Eichsymmetrie in der QFT der elektroschwachen Wechselwirkung. Die Annahme ist allerdings notwendig, damit die Theorie renormierbar bleibt. Auch so ein zweifelhaftes Konzept, mit dem störende Divergenzen vermieden werden können. Beim spontanen Bruch der Eichsymmetrie können die Bosonen dann per Higgs-Mechanismus Masse erhalten, so dass ihre Reichweite auf die Nukleonen beschränkt bleibt. Andererseits ist das Standard-Modell nur eine Näherung. Und für Näherungsrechnungen reichen Stückwerkkonzepte. Mathematikern dürfte das gar nicht behagen; es sei denn, sie haben sich auf die Numerik spezialisiert. Auf dem Weg zu einer vereinheitlichten Theorie der Quantengravitation fehlen einfach noch die zündenden Ideen ... Aber wer weiß? Während der Schiffsreise wird Birte einige Tage Muße dafür haben. Bert sprach davon, dass Relativitäts- und Quantentheoretiker ihren seit einem Jahrhundert währenden Streit heute austragen zwischen Anhängern der Loop-Quanten-Gravity (LQG) und Superstringtheorie (SST). Ihre Wortführer sind Lee Smolin und Leonard Susskind. Eine Zwischenposition nehmen die Statistischen Physiker ein, die an Boltzmann anknüpfend die Bohmsche Mechanik zu einer statistischen Physik der Quantenmechanik erweitert haben. Ihr Wortführer ist der Münchner Mathematiker Detlef Dürr. Mit welcher Begeisterung Birte darüber berichtet hatte, wie sie ausgehend von der Einstein-Trilogie des Jahres 1905 die drei physikalischen Forschungsprogramme weiter verfolgte: von der SRT über die ART in die LQG, von der Photonenhypothese über die Quantenmechanik zur SST und schließlich von der Brownschen Bewegung in die statistische Physik der Quantenmechanik. Da bin ich mal gespannt darauf, zu erfahren, wie weit sie unterdessen gekommen sein wird. In der Mathematik fehlen solche grundlegenden, konkurrierenden Ansätze. Methodisch hat sich der Axiomatizismus durchgesetzt. Thematisch haben Arithmetik, Analysis und Algebra die Geometrie vollends in sich aufgenommen.

Meine *Lenz* wird mit ihrer Onto- die ganze Phylo- und Cosmogenese rekapitulieren, vom Mikrokosmos in den Makrokosmos gelangen und den vier Jahreszeiten folgend, ihren Horizont mit den Strukturen der vier Divisionsalgebren erweitern. Bert und Berit treffen im Schnittpunkt ihrer Weltlinien für einen Moment aufeinander – und er nimmt sie mit nach Hause. Am Vatertag überkommt sie das Verlangen, sich nicht nur intellektuell, sondern auch körperlich zu reproduzieren. Eines unter vielen Millionen Spermien trifft auf das Ovum. Ihre Weltlinien überschneiden sich wie die ihrer Träger. Eine weitere Organisationsebene darunter rekombinierten im Zuge der Meiose die maternalen und paternalen Chromosomen. Zu deren  $2 \text{ hoch } 23$  Möglichkeiten der Rekombination kamen noch die Überkreuzungen der vielen Allele, deren Kombinationsmöglichkeiten mit  $2 \text{ hoch } \text{Tausenden}$  ins Astronomische reichen. Und die derart besonderen haploiden Gameten treffen am Vatertag aufeinander, indem genau ein Spermium aus den 100 Millionen ins Ovum dringt. Eine Zygote ist damit etwas so Zufälliges wie ein Universum. Dem Koitus auf der menschlichen entspricht die Befruchtung auf der zellulären entspricht die Rekombination auf der chromosomalen Ebene. Und die vierte Ebene darunter ist die molekulare Ebene, in der die cytoplasmatische Information des Ovums zur Aktivierung der chromosomalen DNS



wirksam wird. Mit der Implantation der Blastozyste in den Uterus überschneiden sich die Weltlinien der Mutter und des Embryos ... Was wohl daraus werden wird?

1. Juni: Bert ist einkaufen gegangen; denn morgen werden wir den Beginn der Embryogenese feiern können! Meine Periode blieb aus, ich war am Vatertag tatsächlich befruchtet worden und die Blastozyste wird in kaum mehr einem Tag ihre zelluläre Phase beenden. Unsere letzte Feier war der Geburtstag des alten Mannes! Er wird mir ewig in Erinnerung bleiben, lebhaft nachwirken und mich immer wieder gemahnen, was möglich ist zwischen den Geschlechtern. Sechs Ficks in 24 Stunden! Oder waren es neun? Im Anfang war der Dauerfick, die permanente Kopulation; dann die Erweckung wie im Stoßgebet nach Gutsherrenart: *Kurz und heftig, aber bestimmt*. Nach dem Frühstück wurde ich vom schwarzen Mann auf dem Ergosit fixiert, vor der nächsten Mahlzeit platzierte mich der Henker gefesselt auf der Kinderschaukel, bäuchlings und sitzend. Am Nachmittag diente der Rückenschwinger der Sexualgymnastik. Während der Abenddämmerung hing ich an allen Vieren aufgehängt herab, einmal konkav, einmal konvex, und kurz vor Mitternacht verband mir das Monster die Augen. Und nicht nur das! Als ob Bert es längst geplant hatte, bildete er mit mir die lustvolle Synthese aus Sex and Math and Literature: Im Wechsel oder parallel wusste mein Lehrer die Erotika durch Theoreme und Poeme zu ergänzen. Reime und Beweise zum Schmusefick und dem Stoßgebet, den Ergokopulationen und Schaukelfesselungen, dem Rückenschwinger, den Vierhängern und dem Blindfick. Die Erregung beim Vögeln mit verbundenen Augen hatte ich unterschätzt. Der Kitzel der Ungewissheit, die erhöhte Sensibilität der Haut und die volle Konzentration auf sich selbst, haben schon einen besonderen Reiz; abgesehen davon, die lustverzerrte Faltenfresse des alten Sackes nicht mitansehen zu müssen. Umgekehrt macht er es nur ungerne, denke ich; denn wie spiegelt sich meine Wohlgestalt in seinen Augen. Diese triebhafte Geilheit und unverhohlene Lüsterheit, die ihm stets ins Gesicht geschrieben steht beim Anblick meines nackten Leibes!? Das ist so widerlich wie erregend, gerade richtig zur Stimulierung meiner sado-masochistischen Neigungen.

Ich hatte meine zweite Geburt durchlebt und fühle mich wie neu geboren. Diesmal aber bewusst wahrgenommen, intensiv gespürt und ausgiebig genossen in der ganzen Bandbreite meiner synästhetischen Erlebnisfähigkeit. Wie hatte Bert das bloß gemacht? Oder war es meine begehrende Erwartungshaltung und kindfrauliche Aura, die ihn zu jeder Lektion stimulierte und anhaltend modulierte? Jedenfalls machte es ihren besonderen Reiz aus, wie ich die jeweilige Erotik der Kopulationen erfuhr: unerwartet und durchkomponiert, lustvoll und gedankenreich, emotional und sinnlich. Es wellt und nässt sich mir jetzt noch die Vagina, versteift und durchpulst sich die Klitoris, wenn ich nur daran denke ... Und was habe ich erlebend aus den neun Lektionen gelernt: Auf die Reproduktionen kommt es an, immer und überall! Das wusste ich eigentlich schon lange, nunmehr ist die Einsicht Körper geworden. Es begann mit den Fluktuationen der feinsten Regungen. So geschehen nach Mitternacht. Diese Ausdauer des alten Sackes beim fortwährenden langatmigen Eindringen und kurzschlagendem Rückzug. Es war, als ob wir jeweils im rhythmisch synchronen Verhältnis von Atmung und Herzschlag fickten. Für ihn kam das wohl einer Meditation über Kopulation und Physiologie gleich. Für mich aber war es, als ob sich Schwebungen

herausgebildet hatten, deren Amplituden mit jedem Rein-Raus-Akt bereits in der Beckenmuskulatur anwuchsen, sich auf die sinnlichen Projektionszentren übertrugen und dort Schwebungen in den Neuronenaktivitäten befeuerten, um endlich im Lustzentrum eine Reaktion auszulösen, die meinen ganzen Körper erfasste. Ähnliches hatte ich schon öfter beim ruckartigen Versteifen meines Leibes erlebt. Diesmal aber wiederholte es sich ob seiner nicht nachlassenden Ausdauer in der Gleichförmigkeit wieder und immer wieder, bis ich dem Wahnsinn der Ekstase nahe wohl vorübergehend das Bewusstsein verlor und kurz darauf mit einem endlos gedehnten Wohlgefühl der Glückseligkeit in den Schlaf sank.

Die Dauerhaftigkeit eines stationären Musters aufgrund periodischer räumlicher Anordnung, ist das nicht nur die physiologische Grundlage beim Wohlgefühl, Orgasmus oder der Glückseligkeit, sondern auch bei der Embryonal- und Fetalentwicklung bis hin zu den kindlichen Wachstumsprozessen? So einfach wie bei stehenden Wellen oder Schwebungen geht es in Organismen allerdings nicht zu, auch wenn ich mich schwebend leicht und beglückt gefühlt haben mag. Gefühle sind im Vergleich mit den ihnen unterliegenden physiologischen Prozessen extrem einfach. Sie sind wie Karikaturen, spitzen zu, gewichten entscheidungsvorbereitend. Bert hat auf seinem Notebook die Vorträge des 2005 am Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences veranstalteten Seminars *Pattern Formation in Large Domains* gesammelt: *Pattern formation occurs in a wide variety of natural contexts, from animal coat markings to convection cells in the Sun. Experimentally, patterns have been studied in many different systems, including Rayleigh-Bénard convection, solidification, chemical reactions and Faraday waves. Despite the physical differences between these systems, the patterns that appear display common features, indicating some kind of universal underlying structure.* So ist es! Um die universelle unterliegende Struktur geht es. Und die kann in einfachen, zweidimensionalen Fällen mit dem Swift-Hohenberg-Modell dissipativer Strukturen beschrieben werden. Die von Jack Swift und Pierre Hohenberg 1977 zum Verständnis der *Hydrodynamic fluctuations at the convective instability* hergeleitete Swift-Hohenberg Gleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \epsilon \psi - (\nabla^2 + 1)^2 \psi + g \psi^2 - \psi^3$$

erlaubt eine Lösung für  $\psi(x, y)$  durch Integration in die Zukunft, in der sich die zeitliche Entwicklung eines Musters auf die räumliche Struktur dieses Musters bezieht, so dass eine periodische Nahordnung am Ort eine stationäre Lösung in der Zeit nach sich ziehen kann.  $\epsilon$  spielt dabei die Rolle der treibenden Temperatur, die bestimmt, wie weit die Temperaturdifferenz über dem für die Konvektion erforderlichen Minimum liegt. Demzufolge ist die Temperatur am Boden für  $\epsilon < 0$  zu klein, um Konvektion zu ermöglichen, während  $\epsilon > 0$  Konvektion bewirkt. Für die einfache Gleichung:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \epsilon \psi$$

ergäbe sich exponentieller Zuwachs ( $\epsilon > 0$ ) bzw. Abbau ( $\epsilon < 0$ ). Und die Gleichung:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -k \nabla^2 \psi$$

hätte Dissipation durch Diffusion zur Folge, da der Nabla-Term die scharfen Ecken des Musters gleichsam abstumpft. Die Nichtlinearitäten  $\psi^2$  und  $\psi^3$  bestimmen die Rückwirkungen und der Parameter  $g$  kann zur Kontrolle der Stärke der quadratischen Rückkopplung variiert werden.

Welchen Mustern folgen die Zellteilungen in meiner Blastozyste? In Analogie zu den Feldtheorien der Physiker, postulieren Biologen sogenannte morphogenetische Felder, um die Zellverteilungen zu verstehen, die sich gerade in meiner Blastozyste gebildet haben. Dabei folgen die Zellen einem Führungsfeld, das sie selbst erzeugen; ähnlich den Elektronen, die dem elmag. Feld folgen, das von ihren Ladungen ausgeht. Die metaphysische Annahme einer „prästabilisierten Harmonie“ oder „unsichtbaren Hand“ ist nicht erforderlich. Es genügt die Einnahme des energieärmsten Zustands, dem die Elektronen im Atom zustreben; denn Optimierung ist die einfachste Form der Veränderung. Folglich nimmt die Blastozyste für ihre Hülle Kugelform an, bevor sie sich weiter ausdifferenziert. In dieser sphärisch periodischen Zellanordnung sind dann durch inter- und intrazelluläre Ionenströme genau die stationären Zustände möglich, die einem Wachstum durch instantan koordiniertes Zellteilen gleich kommen. Da bin ich mal gespannt, ob die Blastozyste räumlichen Mustern  $\psi(x, y)$  folgt, die noch mit dem Swift-Hohenberg-Modell nachvollzogen werden können. Für die Hülle wird es mit zwei Dimensionen funktionieren, für die hineinwachsenden Zellen aber womöglich eine dreidimensionale Funktion  $\psi(x, y, z)$  zu ermitteln sein. Und wie werden die Diffusions- und Rückkopplungs- bzw. Reaktionsanteile jeweils auszusehen haben? Nach Uecker und Wetzels von der Uni Oldenburg sind Punkt- und Streifen-Strukturen bereits mit vereinfachten Swift-Hohenberg-Gleichungen für  $u(t, x)$  simulierbar, wobei  $n$  gleich 3 oder 5 sein kann:

$$\partial_t u = -(1 + \Delta)^2 u + \lambda u + \nu u^2 - u^n$$

Bert hat selbstverständlich das Kontinuierungs- und Bifurkationspaket *pde2path* in seiner Matlab-Installation integriert. Weitergehende Rechnungen werde ich aber erst mit Birte in Angriff nehmen und mich vorerst qualitativen Studien widmen. Die *Spacio-Temporal Dynamics of Reaction-Diffusion Patterns* auch in drei Dimensionen haben Fiedler und Scheel von der FU Berlin untersucht.

In meiner Blastozyste könnten sich die Zellstrukturen vorerst so wie die Punkte und Streifen an zentral ausgerichteten Linien anordnen. Welche Ionenströme und chemischen Reaktionen mögen dabei eine Rolle spielen? Die 1980 entdeckten Kalzium-Wellen oder die seit 1999 bekannten Proteinoszillatoren? Wie werden sie genetisch gesteuert bzw. initiiert; denn mehr ist nicht erforderlich bei all der Selbstorganisation. *The patterns on sea-shells*, schreibt Pomeau im Vorwort zu Pismens Buch *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics, can be explained by simple reaction-diffusion equations without any recourse to a detailed program written in the DNA of the snails*. So ist es! Dabei unterfällt die Swift-Hohenberg-Gleichung der allgemeinen Form einer Reaktions-Diffusions-Gleichung. Sie gehört zu den einfachsten, musterbildenden Gleichungen und hat einen Diffusionsterm von vierter Ordnung. Wird die Kontinuitätsgleichung auf chemisch reagierende und diffundierende Konzentrationen  $u$  angewandt, folgt eine Reaktions-Diffusions-Gleichung, deren

Zeitableitung gleich der Summe aus Diffusions- und Reaktionsterm ist:

$$\gamma \partial_t u = -\nabla j + f(u)$$

Mit dem Parameter  $p$  und einer Gradientenabhängigkeit des Flusses  $j = -D\nabla u$  wird daraus:

$$\partial_t u = D\nabla^2 u + f(u, p)$$

Eingedenk ihres komplexen Charakters gehört auch die NLS in den Umkreis der RD-Gleichungen:

$$i\partial_t u = \nabla^2 u + u(1 - |u|^2)$$

Eine Modenanalyse der RD-Gleichungen zeigt, dass sie auch quasikristalline Strukturen in  $D$  Dimensionen als Lösungen haben können, wenn  $D + 2$  oder mehr Moden miteinander kombiniert werden. Die Ordnung in höherer Dimension bestimmt dabei diejenige der niederen; denn Quasikristalle sind zwar geordnet, aber nicht periodisch. Keine Zelle gleicht der anderen. Um die Versetzungen in echten Kristallen berechnen zu können, wurde 1938 die *sine-Gordon*-Gleichung eingeführt, die eine nichtlineare Variante der Wellengleichung darstellt:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \sin \phi$$

Wie in dem von Christiansen herausgegebenem Buch *Nonlinear science at the dawn of the 21st century* ausgeführt wird, wurde bereits 1937 die erste RD-Gleichung formuliert:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(u - a)(u - 1)$$

Diese Gleichung diente dem Verständnis der räumlichen Ausbreitung von Genvarianten in einer Population. Mathematisch macht es keinen großen Unterschied, ob es sich bei der Population um eine Blastozyste oder Zellkultur, eine Fliegen- oder Mäusepopulation handelt. Und so beschreibt die Gleichung auch grundsätzlich die räumlichen Verteilungen von Störungen in anregbaren Medien. In Verbindung mit seinen Untersuchungen zur KI beschäftigte Turing sich 1952 mit der *Chemical Basis of Morphogenesis* und äußerte die Vermutung, dass *the interplay of chemical reactions and diffusion may lead to spontaneous formation of spacial patterns*. Ebenso wie die NLS haben RD-Gleichungen Lösungen für nichtlineare, fortlaufende Wellen, wie sie speziell die Nervenimpulse in meinem Hirn darstellen. Elektroingenieure benutzten sie schon in den 1960er Jahren zum Bau von *Neuristoren*, abgewandelten Halbleiter-Bauelementen zur Nachbildung der Funktion von Nervenzellen. Und neben den zwischen Neuronen fortlaufenden Aktionspotentialen beschreiben RD-Gleichungen ebenfalls die Verteilung der Erregungen über ganze Nervennetze. Nach dem 20. Jahrhundert als „Jahrhundert der Physik“ soll das 21. Jahrhundert zum „Jahrhundert der Biologie“ werden. Folglich beginnt die nichtlineare Wissenschaft mit der Behandlung von Anregungen kontinuierlicher Medien und endet mit der biomolekularen Dynamik. In der einleitenden Arbeit behandeln Kuznetsov und Zakharov, ausgehend von einer Randomisierung des Phasenraums, auch die NLS-Gleichung. Im abschließenden Kapitel widmet sich Haken den Nichtlinearitäten im Gehirn. Die biomolekulare Dynamik hebt an mit der DNS-Dynamik, deren Ausblick damit endet, einen Zusammenhang

zwischen Struktur, Dynamik und Funktion herzustellen: *We shall describe here several examples where the mechanisms of conformational transitions, of long-range effects, of regulation of transcription process and of DNA denaturation are explained in terms of nonlinear dynamics.* Die biomolekulare Dynamik begann bereits mit der *FPU-Chain*, der von Fermi, Pasta und Ulam eingeführten eindimensionalen Molekülkette mit kubischer Anharmonizität. In einer derartigen Molekülkette entdeckten Zabusky und Kruskal 1965 erstmals Solitonen! Ausgehend von dieser stabilen Struktur in einer Dimension wurde die FPU-Kette auf zwei und drei Dimensionen erweitert und siehe da, es zeigten sich weitere stabile Strukturen in der Molekulardynamik: *zigzag*-Formen in zwei und die  $\alpha$  - *Helix* in drei Dimensionen! Die Nichtlinearitäten im Gehirn sind vielfältig und wesentlich. Allein schon die elektro-chemische Kopplung an den Synapsenspalten, wo pulscodierte und rauschbasierte Signale das Diffundieren der Transmitter auslösen, die wiederum Folgereaktionen an den Rezeptoren bewirken. Für den Dendritenstrom  $\psi$  setzt Haken gemäß *noisy lighthouse model* folgende Gleichung an:

$$\frac{d\psi}{dt} = aP(t - \tau) - \gamma\psi(t) + F_\psi(t)$$

Darin wird  $a$  als konstant angenommen,  $P$  steht für die Pulsstärke,  $\tau$  ist die Verzögerungszeit,  $\gamma$  die Zerfallskonstante und  $F$  eine fluktuierende Kraft. Die Fluktuationen haben auch die spontane Freisetzung von Transmittern zu berücksichtigen. In einem weniger vereinfachten Modell wird die Gewichtung der Pulse nicht als konstant angenommen, sondern aus ihrer Geschichte aufintegriert:

$$\frac{d\psi}{dt} = \int_{-\infty}^t G(t, \sigma)P(\sigma)d\sigma - \gamma\psi(t) + F_\psi(t)$$

Aus einem Netzwerk solcher Einzelverbindungen heraus werden bereits die für Nervennetze typischen anregenden und hemmenden Effekte berechenbar. Ein solcher bottom up – Ansatz für die Hirndynamik dürfte undurchführbar kompliziert werden. Deshalb schlägt Haken eine Verbindung mit seiner Synergetik vor. Die wenigen Ordnungsparameter-Entwicklungen, die nach dem Versklavungsprinzip noch erhalten bleiben, sind dann mit den Mustern der EEG- und MEG-Messungen zu vergleichen. Dazu werde ich mir mit Birte die *Principles of Brain Functioning* vornehmen. Einen Ausblick auf das „Quantengehirn“ haben Ivancevics in ihrer Monographie *Quantum Neural Computation* gewagt. Und natürlich spielt wieder NLS die Hauptrolle, lassen sich doch mit ihr Quantensuperposition und neuronale Nichtlinearität verbinden. Hinsichtlich des wirklichen menschlichen Gehirns ist das Spekulation, mit Blick auf die KI für das Roboting allerdings visionär; denn Roboter mit Quantengehirnen, die gleichsam einen Quantengeist hervorbringen, müssten den Menschen weit überlegen sein. Und meine Spekulationen über den Zusammenhang zwischen der physiologischen Grundlage des Empfindens, der Lustgefühle und des Bewusstseins? Über die Quantenmechanik weiß ich noch nicht genug. Bert wird mir meine Lücken weiter schließen müssen. Aber mal sehen, was die Ivancevics dazu schreiben. Zunächst einmal nehmen sie Bezug auf die lineare Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = V \psi$$

Diese Gleichung beschreibt die Entwicklung der Quantenzustände von Teilchen, während NLS gleichsam die Anregungen eines Quantenmediums darstellt, wie z.B. des Bose-Einstein-Kondensats:

$$i\psi_t + \Delta\psi = \mu|\psi|^{p-1}\psi$$

Wobei  $\mu$  das Vorzeichen ist und  $p > 1$ . Im Unterschied zur linearen Gleichung bestimmt im nichtlinearen Fall die Lösung das Potential, das somit nicht mehr einfach vorgegeben werden kann. So weit, so gut, aber wann kommen die Neuronen, Nervennetzwerke und das Bewusstsein ins Spiel? Mit den kohärenten Quantenzuständen, zu denen die Proteinstrukturen der Mikrotubuli das Zytoskelett befähigen sollen. Davon hatte Bert schon einmal mit Bezug auf Penrose gesprochen, den Ansatz aber als wenig glaubhaft problematisiert; denn Superpositionen kohärenter Quantenzustände seien extrem störanfällig und nur unter weitgehender Isolation oder beim absoluten Nullpunkt möglich. Aber wer weiß, vielleicht hat sich im Laufe der Evolution in Lebewesen eine Stabilisierungsmöglichkeit ergeben, ähnlich wie bei den Hochtemperatur-Supraleitern. Der sogenannte mental code wäre also gleichsam in den Mikrotubuli (MTs) implementiert. Und könnte durch NLS formalisiert werden? *The MT-MAP complexes or cyto-skeletal networks determine the cell architecture and dynamic functions, such a mitosis, or cell division, growth, differentiation, movement, and for us here the very crucial, synapse formation and function, all essential to the living state.* Liegt dem mental code ein Quantencomputer zu Grunde? Eine kühne Hypothese! NLS kommt dabei erst wieder auf der Sinnesebene ins Spiel, nämlich beim stochastischen Filtern von Sinnesdaten hinsichtlich der Vorhersage ihres weiteren Verlaufs: *The filtering problem in this new framework can be seen as the ability of the non-linear Schrödinger wave equation to produce a wave packet solution that glides along with the time varying pdf corresponding to the signal  $y(t)$ .* Die NLS-Lösungen folgen gleichsam der dem Eingangssignal entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichte-Verteilung. Womöglich ist die Quanten-Wahrscheinlichkeit im gesamten Bereich der menschlichen Wahrnehmung und Entscheidungsfindung wesentlich. Aus der schönen phänomenologischen Lebenswelt würde ein *Life Space Foam* werden, die Lebenswelt wäre in einen „aufgeschäumten“ Lebensraum verwandelt. Und im Quantenschaum fluktuieren die Gewichtungen für die Wahrnehmungen und Entscheidungen nach der Quantenwahrscheinlichkeit: Superpositionen statt Entweder-Oder? Für die Vorhersage von Optionspreisen  $u(\sigma, s)$  hätte das zur Folge, dass die Black-Scholes-Gleichung durch ein NLS-Paar für die Volatilität  $\sigma$  und die Optionspreise  $\psi$  zu ersetzen wäre:

$$\text{Black - Scholes option price : } \partial_t u = -\frac{1}{2}(\sigma s)^2 \partial_{ss} u - r s \partial_s u + r u$$

$$\text{Volatility NLS : } i\partial_t \sigma = -\frac{1}{2}s^2 |\psi|^2 \partial_{ss} \sigma + V(w) |\sigma|^2 \sigma$$

$$\text{Option price NLS : } i\partial_t \psi = -\frac{1}{2}s^2 |\sigma|^2 \partial_{ss} \psi + |\psi|^2 \psi + r \psi$$

$$\text{Adaption ODE : } \frac{dw_i}{dt} = -w_i c |\sigma| g_i |\psi|$$

$$V(w) = \sum_{i=1}^n w_i g_i$$

Mit der *option price PDF*  $|\psi(t, s)|^2$ , der *volatility PDF*  $|\sigma(t, s)|^2$ .  $r$  ist die *interest rate* und  $c$  die *Hebbian learning rate*. Mit dem Modell müssten sogar den Monsterwellen ähnliche Kursausschläge zu berechnen sein. Die  $\sigma - NLS$  steht für die kurzzeitige PDF-Entwicklung der stochastischen Volatilität, die  $\psi - NLS$  definiert die langzeitliche PDF-Entwicklung der Preise. Die Kopplung beider entspricht einer Hebelwirkung, da die Volatilität negativ mit den Preisen korreliert ist. *The  $w$ -ODE defines the  $(\sigma, \psi)$ -based continuous Hebbian learning.* Das adaptive Volatilitäts-Potential  $V(w)$  wird bestimmt aus den Produkten der Gewichtungsfaktoren  $w_i$  und den Komponenten  $g_i$  des Gaußkern-Vektors. Es kann auf die „Markttemperatur“ bezogen werden, die einer Boltzmann-Verteilung folgt; denn die beiden ökonomischen Prozesse entwickeln sich in dem *Marktwärme – Potential*  $V(w)$ . Mit der Hinzunahme des Hebbischen Lernmodells in ihr *option price modeling using neural quantum computation* haben Ivancevics einen fünften Schritt in die Verhaltensökonomie gewagt, in der die Lernrate  $c$  den zweiseitigen NLS-basierten raum-zeitlichen assoziativen Speicher repräsentiert. Da steckt im Detail eine Menge Arbeit drin, die die Autoren hinter sich gebracht haben; schließen sie doch ihrer mathematischen Theorie die numerische Simulation an. So sorgfältig wie Mandelbrot bei seiner Analyse eines ganzen Jahrhunderts des Baumwollhandels sind sie allerdings nicht vorgegangen beim Verfolgen der Volatilitäts/Preis-Solitonen mit ihren Reflektionen und Kollisionen. Ob dieses aus der Physik stammende Modell jemals von in der Praxis stehenden Ökonomen benutzt werden wird, ist fraglich. Ähnlich dürfte es den *New Research Trends in Option Pricing* gehen, die der Mathematiker Matthias Erhardt vom Weierstrass-Institut zu Berlin in dem Buch *Nonlinear Models in Mathematical Finance* herausgegeben hat. Einleitend führt er darin aus: Nichtlineare Black-Scholes-Gleichungen *provide more accurate values by taking into account more realistic assumptions, such as transaction costs, risks from an unprotected portfolio, large investor's preferences or illiquid markets, which may have an impact on the stock price, the volatility, the drift and the option price itself.* Ob es am Weierstrass-Institut für angewandte Analysis und Stochastik heute noch eine den Spuren Sonjas folgende Mathematikerin gibt? Weltweit arbeiten sie mit daran, die Finanzmathematik durch nichtlineare Modelle zu verbessern. In den *Research Trends* tauchen unter den Autoren eine Ljudmila, Maria und Julia auf. Immerhin! Dabei stehen Stochastische Differentialgleichungen nach wie vor auf meiner Agenda. In ihre Theorie werde ich mich zusammen mit Birte einarbeiten. Ihre Anwendungen überdecken gleichermaßen Physik und Ökonomie. Die Erweiterung der Black-Scholes-Gleichung zur gekoppelten NLS mit adaptivem Volatilitätspotential hat es einmal mehr gezeigt.

Ideale Märkte gibt es ebenso wenig wie ideale Bewegungsformen. Was Bert nicht müde wird, in seinen Essays immer wieder hervorzuheben, ist die Geltung des näherungsweise vereinheitlichenden Paradigmas NVP in der neuzeitlichen Naturphilosophie. Den aus ihr heraus entwickelten Natur- und Technikwissenschaften gelingt stets nur eine mehr oder weniger gute Annäherung an die Realität bzw. das Ideal. In den Idealwissenschaften und symbolischen Künsten ist das zum Glück anders. Mathematik und Literatur werden wesentlich aus sich heraus betrieben, folgen der logischen Konsistenz oder sprachlichen

Wohlordnung ... Oder könnten das zumindest. Praktisch dominiert die angewandte Mathematik und der Unterhaltungsroman; denn alles Zählen und Erzählen basiert auf der Reproduktion, der die Produktion nachgeordnet ist ... So wie das Zählen dem Erzählen? Die Produktion ist erst seit der Agrar- und Industriegesellschaft zum dominierenden Bereich geworden, weil die Männer darin die Hauptrolle spielen und durch sie die Macht übernehmen konnten. Seitdem gelten die Männer als Ernährer, Erbauer und Eroberer. Unter den Nomadenvölkern kam vermutlich noch den sammelnden und gebärenden Frauen die Ernährerrolle zu. Im Zuge der neolithischen Revolution gewannen die Erbauer und Eroberer die Oberhand. Sie erschlossen fruchtbares Acker- und Weideland, erbauten ummauerte Städte und übernahmen als Haushaltsvorstand auch noch die Rolle des Ernährers. Hinzu kamen riesige steinernde Kultstätten, Pyramidengräber und Kathedralen zur Verewigung und Feier des „Herrn“. Was den Frauen einzig blieb, war ihre Gebärfähigkeit, auf die sie fortan weitgehend reduziert wurden. Den Frauen oblag es, sich der Küche und den Kindern zu widmen und sie in die Kirche zu führen: KKK, die Männer dagegen strebten ihrer Rasse gemäß nach Raum und Reich: RRR oder: *Ein Volk, ein Reich, ein Führer!* Unterdessen haben die Männer die Erde gänzlich unter sich aufgeteilt und keine Eroberungen mehr zu machen. Auf dem Bau verrichten Maschinen die schweren Arbeiten und kein Erbauer ist mehr erforderlich. Die Ernährung ist ebenfalls industrialisiert worden, so dass die Männer in all ihren traditionellen Rollen überflüssig geworden sind. Was hält sie noch an der Macht? In der westlichen Zivilisation ist es ihr Reichtum und ihre damit verbundene Verfügung über die Produktion! In den religionsbestimmten Kulturen ist es nach wie vor die schiere Gewalt, die Frauen zu Gebärmaschinen degradiert. Die Macht der Männer über die Reproduktion ist das Dynamit der Bevölkerungsexplosion. Im Zuge von Aufklärung, Kapitalismus und Industrialisierung wurde die Macht über die Reproduktion zum Teil den Frauen überlassen. Das stabilisierte die Bevölkerung, befeuerte aber eine Warenexplosion. Die Frage ist: Würden Frauen nach einer Machtübernahme in der Produktion auch den Konsum stabilisieren? Männer verschwenden gleichgültig, Frauen haushalten wählerisch? 100 Mill. Spermien jagen einem Ei entgegen. Aber was sollte das eine mit dem anderen zu tun haben? Unsere Physis gibt eine Tendenz vor, um die wir unsere Handlungen fluktuieren lassen können. Ganz wie bei Fokker-Planck. Und wie ließe sich eine reproduktionsbasierte Ökonomie ausarbeiten, geschweige denn praktizieren? Müssten in ihr nicht die thermodynamischen Hauptsätze die Hauptrolle spielen und ihre politische Umsetzung auf eine Nachhaltigkeitswirtschaft hinauslaufen? Gibt es vielleicht schon längst eine feministische Alternative zur männerbestimmten Ökonomie? Wäre es eine Marktwirtschaft ohne Kapitalismus, von der Bert einmal sprach? Ich werde ihn darauf ansprechen. Er dürfte bald wieder zurück sein.

Was für schöne Tage das waren! Sie kulminierten in den Höhepunkten der Lust und setzten sich fort in der Freude an den Studien über die Reaktions-Diffusions-Gleichungen. Welch ein Strukturreichtum und eine Vielfalt von Mustern mit ihnen hervorgebracht werden kann. Aber vermögen sie auch der Embryogenese gerecht zu werden? Welche Reaktionen wann auszulösen sind, wird letztlich von den Genen abgelesen. Es dürfte sich dabei um eine dem Regelkreis ähnliche Struktur handeln, in der die von den Genen ausgelösten und ihrer Eigendynamik folgenden RD-Muster auf die Genexpression zurückwirken. Die Orga-



nogenese wird bereits mit der Gastrulation eingeleitet und folgt dem mit der Invagination eingestülptem Entoderm. Musterbildungen, Zellproliferationen und Zelldifferenzierungen bewirken in Verbindung mit Zellbewegungen und Zelltoden die jeweilige Morphogenese. Aus den noch nicht determinierten embryonalen Stammzellen können isoliert durch Determination leicht alle anderen Zellen gewonnen werden. Unter dem Diktat der christlichen Fundamentalisten ist es allerdings nicht erlaubt, Embryonen zur Züchtung von Klonen oder Gewebekulturen für den Organersatz zu verwenden. Mit dem massenhaften Töten von Tieren hat kaum ein Christ Probleme, aber winzige Zellanhäufungen, wie die Embryonen, die nur als Anhängsel im Mutterleib am Leben bleiben, gelten als „heilig“, dürfen nicht einfach abgetrieben und schon gar nicht für medizinische Experimente benutzt werden. Die macht man lieber an erwachsenen, leidensfähigen Tieren. Würde dieser Schwachsinn und diese Grausamkeit in einer von Frauen regierten Gesellschaft noch Bestand haben? Ebenso wie über ihre Eier sollten Frauen über ihre Embryonen entscheiden dürfen. Im patriarchalen Gottesstaat Deutschland ist beides verboten. Ich „spüre“ geradezu den sich in mir anbahnenden Übergang von der zellulären in die embryonale Phase. Die Entwicklung des Embryos werde ich rücksichtsvoll als Teil von mir versorgen; denn allein aufgrund meiner Entscheidung gibt es ihn überhaupt. ICH habe ihn erzeugt, indem ich mich meiner weiblichen Natur und der eines Mannes bediente ... Aber sagen das nicht auch die vergewaltigenden Väter von ihrem Kind? Dass sie es erzeugt und sich der Frau bedient hätten? Der Unterschied liegt im Selbstbestimmungsrecht, in der Unverletzlichkeit des Körpers und im Straftatbestand der Vergewaltigung. Wenn Männer ungeschützt mit Frauen vögeln, haben sie in Kauf zu nehmen, dass die Frauen schwanger werden und das Kind behalten wollen. Den meisten Männern dürfte es eh ziemlich egal sein, ob die Frau ein Kind will oder nicht; wenn sie nur nicht dafür zur Verantwortung gezogen werden. Frauen sollten allerdings eigenständig genug sein, um für sich und das Kind selber sorgen zu können ... Trifft das eigentlich auf mich zu? Eher nicht. Ich bin gespannt, was Bert noch dazu sagen wird ... Schließgeräusche, die Außentür wird geöffnet, leise, aber schweren Schrittes tritt der alte Mann herein, geht sogleich in die Küche, stellt Rucksack und Einkaufstaschen ab, kommt wieder heraus, schließt die Tür und – ist nicht mehr zu hören ... Seine Geräusche gehen unter im Außenlärm. Ist er ins Bad gegangen? In sein Zimmer? Ich sollte ihm beim Auspacken helfen, schaue auf, will aufstehen, da sehe ich ihn. Gedankenversunken steht er an der Terrassenbrüstung und lässt seinen Blick über die Stadt schweifen.

3. Juni: Der alte Mann ist eingeschlafen. Ruhig und tief atmend liegt er neben mir. Seine faltige Altersfresse hat sich entspannt und geradezu kindliche Züge angenommen. Wie vergnügt er entschlummerte!?! Den Biss in den großen Kapuzenmuskel habe ich gut hinbekommen. Daran werden wir einige Wochen unseren Spaß haben können. Und wie er den Specht gemacht hat! Der Vogel muss ihn einstmals schwer beeindruckt haben. Ich stelle mir vor wie er im Wald fasziniert einen Specht aus nächster Nähe beim wilden Einschlagen auf einen hohlen Baum beobachtet. Nicht minder beeindruckt haben ihn die Störche mit ihren langen Schnäbeln, wenn sie damit zielsicher die Frösche aus dem Bachufer fischten. Und dann die Sache mit dem Daumenkinol? Das hatte *er* doch seinen

Angebeteten gezeigt, die natürlich sofort Gefallen daran fanden. Aber was wollte er ihnen damit wirklich demonstrieren? Was es mit dem Vögeln auf sich hat? Handelte es sich in Wirklichkeit um ein Daumenkino für Erwachsene, das er damals noch nicht verstanden hatte? Als Grundschülerin hätte ich mich sicher in ihn verliebt. Er muss einmal ein süßer kleiner Bengel gewesen sein, intelligent und wissbegierig. Und immer darauf aus, alles um sich herum verstehen zu wollen. So ist er bis heute. Ob er bereits Mutmaßungen darüber anstellt, was das Wohlgefühl während meines Wundenleckens in ihm auslöst? Vorerst wird er es als postorgasmische Nachwirkung verstehen können. Dabei habe ich auch schon unabhängig vom Vögeln an ihm gelutscht. Mal abwarten, wann ihm ein Licht aufgehen wird. Mir jedenfalls ist heute ein Licht aufgegangen! Wie geil mich seine Ganzkörperstimulierungen gemacht haben. Langsam und sachte beginnend, schneller und stärker werdend schaukelte sich in mir eine erste Ekstase auf, die ihren beglückenden Abschluss im Specht-Stakkato fand! Was ihn wohl zum beidseitigen Durchwalken meines Körpers veranlasst hatte? Die Doppelseitigkeit zündete eine sich aufschaukelnde Schwebung in allen Projektionszentren, die ein noch nie gespürtes Ganzkörpergefühl auslöste. Die sich daraufhin im ekstatischen Krampf auflösende Anspannung war berauschend hell und licht und wurde vom tief unterliegenden Bass-Stakkato ideal ins Dunkel der Bewusstlosigkeit begleitet, aus der ich gleich einer Himmelfahrt verklärt erwachte.

*Liebe, Arbeit, Kino.* Dazu waren wir nicht mehr gekommen. Müde bin ich noch nicht. Ich werde mir den Kontext zu *Rette sich wer kann (Das Leben)* vornehmen: *Also, welchen Zug soll man nehmen? In welchem Bahnhof soll man zusteigen? Wie findet man eine Tätigkeit, die es einem gestattet, ein wenig eigene Musik zu spielen, anstatt immer nur die der anderen zu begleiten?* In drei Bewegungen wird es *von der Hölle zur Mitte, von der Mitte zur Mitte, von der Mitte zum Jenseits* gehen. Aber in wie viele Einstellungen und in wie viele Takes je Einstellung werden die drei Bewegungen zerlegt und wieder zusammengesetzt? Wie viele Rhythmuswechsel, Verlangsamungen und Beschleunigungen werden dafür erforderlich? *Es ging in diesem Film nicht nur um einen Start und um eine Ankunft, sondern um drei unterschiedliche Rhythmen*, sagt Godard und lässt sich im Film wieder mitspielen, aber nicht als er selbst, sondern durch einen Schauspieler. Neben dem Mann aus der Hölle der Stadt, der ihrem Rhythmus nicht mehr gewachsen ist und deshalb (wie im Daumenkino des Buches) vor ein Auto gerät, gibt es *Isabelle*, die Frau der Mitte, eine Prostituierte: *Die Arbeit und die Ware haben ein und denselben Körper.* Die dritte im Bunde ist *Denise*, eine Intellektuelle, die es aus der Hölle der Stadt ins Jenseits des Gebirges zieht, um in Ruhe ihren Projekten nachgehen zu können. Permutationen gleich treffen die drei Akteure aufeinander und verweisen auf je verschiedene Kontexte. *Godard* hat zu einer Diskussion im Filmclub eingeladen. Gezeigt wurde der Film *Hiroshima mon amour*, aber wer kommt nicht? Die Autorin Marguerite Duras. Godard fasst zusammen: *Die Bewegungen der Figuren sind nicht dramatisch oder psychologisch legitimiert, sie verlaufen zwischen einfachen Koordinaten, der Stadt (Hölle), dem Land (Mitte), dem Gebirge (Jenseits) und markieren darin jeweils eigene Konstellationen. ... Denise („Das Imaginäre“) hat gewählt. Sie hat sich entschieden ihre Beziehung zu Paul Godard abzubrechen, ihren Beruf eine Zeitlang aufzugeben und sich ins Gebirge zurückzuziehen, um dort zu schreiben. Paul („Die Angst“) ist unsicher, unentschieden. Ein moderner Hamlet, der unfähig*

ist, seinem Wunsch nach Veränderung nachzukommen. ... Für Isabelle („Der Handel“) existiert das Problem der Wahl nicht: sie agiert. Sie mietet das Apartement, für das sich Paul entscheiden kann, um von dort aus ihrem Handel, der Prostitution, nachzugehen. Sie verkörpert die Mitte, eine flexible Mitte zwischen Stadt und Land, Arbeit und Wohnen, Arbeit und Liebe ... Eine flexible Mitte zwischen Penthouse und Stadt, Arbeit und Wohnen, Mathe und Sex ... Ergeht es mir nicht ganz ähnlich? Solange ich minderjährig bin, habe ich keine andere Wahl, als vorerst untergetaucht zu bleiben. Wer kann, rette sich vor dem Leben?

18. Juli: Die Fetogenese hat begonnen! Nach Herausbildung der Keimblätter beginnen Ausdifferenzierung und Entwicklung der Organe. Der Fetus ist etwa 3 cm groß, in seinem Rückenmark können bereits erste Reflexe ausgelöst werden. Diesen Entwicklungsschritt wussten wir gebührend zu feiern. Was Bert nicht alles hatte kommen lassen. Ein Gourmet-Abendessen vom Feinsten, einschließlich Zubereitung. Um mich nicht der Gefahr des Auffliegens auszusetzen, hatte er in der Küche kochen lassen, aber alles selber serviert. Als Vorspeise eine *Variation vom Bonito mit Tatar, Carpaccio und im Noriblatt gebacken*. Dann eine *Övelgönner Fischsuppe a la Bouillabaisse, Croustini und Sc. Rouille*. Es folgte das Norddeutsche Hauptgericht: *Steinbuttrücken im Stück gekocht mit Wasabi-Meerrettich, Meerrettich Butter, Salzkartoffeln*. Und als Dessert ein *Käsekuchenflan mit Mangosorbet*. Bert gönnte sich in unorthodoxer Weise einen Rotwein zum Fisch, eine Spätburgunder Spätlese trocken. Ich begnügte mich mit einem Mineralwasser und frisch-gepresstem Orangensaft. Und zur Nacht magic cookies zum andauernden Beischlaf. Wie schön, wieder von der Ausdauer eines alternden Liebhabers zehren zu können! Geräuschlos hat er sich davon gemacht und nach der Liebe zur Arbeit begeben. Wie ruhig und behaglich es hier ist. Heute schreibe ich nackt im Bett auf dem Bauch liegend mein Tagebuch. Bert hat das Fenster weit geöffnet zurückgelassen und ein warmer Lufthauch überstreicht meine Haut. Ich werde mich weiter der Kinematografie widmen mit der tollen Filmkamera. Die hat er sich was kosten lassen! Aber warum auch nicht? Begonnen habe ich klassisch mit der Einheit von Raum, Zeit und Handlung. Nahrung und Paarung der Eltern zur Fetogenese ihres Sprösslings. Auf den Genuss der kulinarischen Gaumenreize folgte das rauschhafte Vernaschen der Körper. Die erste Einstellung der ersten Szene: der im Wohnzimmer gedeckte Tisch. Die erste Einstellung der zweiten Szene: mein auf dem Bett hingestreckter Leib. Beide Einstellungen sind noch vielfach zu variieren. Und dann kommen Kleidung und Wohnung hinzu. Das gothic girl mit dem Henker. Und alles zusammen auf dem Dachgarten. Anschließend das Drumherum: Die Sicht vom Dachgarten in die vier Himmelsrichtungen. Der Blick vom Innenhof und vom Alma-Wartenberg-Platz auf das Haus. Der Hinweis auf meine Herkunft über einen Schwenk auf das Aurel. Die Jahreszeit erkennt man an den Blumen und Bäumen. Und das Jahr? An den Veranstaltungsplakaten und Filmankündigungen, auf die in Verbindung mit dem Rundumschwenk auf dem Platz gezoomt werden kann. Aber vor der Nahrung kommt natürlich die Atmung, die Geburt. Die zweite Szene wird sich auf den Feten und seine Entwicklung beziehen. Von den ersten Rückenmarksreflexen bis zur Ausbildung des Gehirns. An die dritte Szene auf der Arbeit wird Bert mit dem Shot der Ankunft Birtes anschließen und die vierte

Szene starten. Da sie nichts davon weiß und überrascht sein wird, werden mehrere Takes zu machen sein. Von der Terrasse aus kann in den Himmel und des Nachts in die Weite des Kosmos geschaut werden. Einstellungen vom Schiffsverkehr an der Elbe weiten die Ortskreise über den Hafen hinaus auf unsere Herkunft aus Übersee ... Wenn doch Birte endlich hier wäre!

6. August. Sputnik 1 war am 4. Oktober 1957 der erste künstliche Erdsatellit auf einer Umlaufbahn und gilt als Startschuss der sowjetischen Raumfahrt. Der Wettbewerb mit den Amerikanern begann. Am 21. Juli 1969 betraten die ersten Menschen im Zuge der Mission Apollo 11 den Mond. Und heute hat der autonome Rover Curiosity die ersten Bilder vom Mars gefunkt. Er verfolgt eine Mission im Rahmen des Flagship-Programms der NASA zur Erforschung des Sonnensystems. Und welcher Mission folge ich? Dem Wiedereintritt in die Zwillingssidentität zur Erforschung des Geschlechtersystems? Warum gibt es Sterne?, fragt sich Smolin in *Reborn Time*. Warum gibt es Geschlechter?, frage ich mich. Allein an der Reeling unter dem Sternenhimmel kann einem wunderbar werden. Wohin mich meine Reise führen wird, weiß ich: nach Hamburg. Übermorgen werde ich ankommen. Aber wie wirklich ist die Zeit? Der Raum und die Materie sind offensichtlich. Die Zeit dagegen scheint wie ein Fluidum, allgegenwärtig und mitnehmend, nicht wirklich fassbar. Erwachsen geworden, wird es nach Waterloo gehen ins Perimeter Institute for Theoretical Physics.

12. August: War das ein Wiedersehen! Tage wie im Rausch! Im Bett, auf der Couch oder im Bad. Jetzt können wir unser Leben endlich gemeinsam selbst in Angriff nehmen. Nach der präpubertären die postpubertäre Symbiose. Wie Berit nur diesen wunderlichen Gelehrten und vereinsamten Höhlenbewohner ausfindig machen konnte? Das war schon ein astronomisch unwahrscheinlicher Zufall. Und wie passend seine Gelehrtenhöhle als Refugium für unser gemeinsames Studieren und das Vorbereiten auf die Prüfungen ist! Bis zum Erwachsenwerden haben wir uns um nichts zu kümmern. Der alte Mann überlässt uns sein Schlafzimmer, kleidet uns ein und hält stets den Kühlschrank gefüllt. Wenn das nicht ein Paradies auf Erden ist!? Berits Beziehung zu ihm ist mir allerdings nicht ganz klar geworden. Und dann ist sie auch noch schwanger!?! Unterfällt das wirklich ihrem Reproduktionsprojekt? Oder ist es die Folge ihrer Zwangsneurose seit Kindertagen? Nichts liegt mir ferner als schwanger zu werden. Per Telefonsex hatten wir uns synchron mit einem Dildo entjungfert. Hätten wir nicht auch zugleich vom selben Mann geschwängert werden können? Über die besondere Ausbildung ihrer Synästhesien muss mich Berit noch eingehend unterweisen. Was sie mit dem alten Sack nicht schon alles angestellt hat bzw. er mit ihr oder beide miteinander? Ist das nicht nur seinem baldigen Ableben geschuldet? Und wie sie sich das Leben hier mit einem Säugling vorstellt? Was die 1661 wohl für eine Genkombination ergeben hat? Es wird doch nicht *Rosemary's Baby* werden? Des Teufels Kreatur oder ein himmlischer Engel? Da bin ich mal gespannt; denn Bert haftet schon etwas Unheimliches an. Dass Berit gerade darauf so abfährt ... Was hatte sie damals im Domkeller erlebt, als ich sie endlich fand im Verließ und sie mich mit einem so irren Blick aus blutverschmiertem Gesicht ansah? Und die vielen Skizzen und Zeichnungen,

die sie angeblich alle für ihren Lenz-Comic ausgeführt hat? Die sind so faszinierend wie beunruhigend. Ob sie dem alten Mann wirklich diese tiefen Bissmale zugefügt hat, von denen sie beiläufig sprach? Dass wird sich doch kein normalsinniger Mensch gefallen lassen. Aber wer weiß? Vielleicht sollte ich ihn einmal wie zufällig im Bad oder Bett überraschen. Noch wird er keinen Unterschied zwischen uns bemerken. Daraus sollten wir uns einen Spaß machen, ganz so wie früher, als wir ständig verwechselt wurden. Berit ist fast drei Monate schwanger und der Fetus bereits mehrere Zentimeter groß, aber zu sehen ist noch nichts.

Mit dem mathematischen Verständnis der Morphogenese durch RD-Gleichungen hat Berit bereits begonnen. Das Studium der NLS und das weite Feld stochastischer Differentialgleichungen (SDGLs) kann ich anhand ihrer Aufzeichnungen nachvollziehen, ebenso die Anfänge der Differentialgeometrie und Funktionalanalysis. Danach werden wir uns der Dirac-Gleichung zuwenden. Die ist in der Physik so bahnbrechend gewesen wie die anderen Wellengleichungen, von D'Alembert über Maxwell, Schrödinger und Klein-Gorden. Und hatten wir nicht genau auf Diracs Geburtstag wieder zusammengefunden? Das muss auch physikalisch gefeiert werden. Wie passend, dass Bert Physiker ist und sich in seinen Bücherstapeln all die Lehrbücher und Monographien verbergen, die wir brauchen. Berit hat schon einige zurechtgelegt: von Diracs Klassiker *The Principles of Quantum Mechanics* bis hin zu den Lecture Notes Schmüasers, die Bert noch während seiner Zeit bei DESY las: *Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*. So wie Klein und Gorden die D'Alembert-Gleichung relativistisch verallgemeinert hatten, um Bosonen-Zustände beschreiben zu können, hatte Dirac zum Verständnis von Fermionen-Zuständen nach einer speziell relativistischen Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung gesucht. Dabei hatte Schrödinger seine Gleichung im Anschluss an Hamilton mehr oder weniger erraten, um die physikalischen Elektronenzustände im Wasserstoffatom als mathematisches Eigenwertproblem behandeln zu können. Andererseits folgt die Schrödinger-Gleichung aus der Dirac-Gleichung. Da wäre es doch interessant, wenn man die Dirac-Gleichung aus ersten physikalischen Prinzipien oder sogar mathematisch herleiten könnte: aus einer konformen Differentialgeometrie oder einer quaternionisch erweiterten Lorentz-Invarianz. Theoretische oder Mathematische Physik? Ich werde mich mit den physikalischen Prinzipien beschäftigen und mir von Berit die Mathematik nahe bringen lassen. Am Ende sollten beide Wege zusammenstimmen.

In seiner *RELATIVISTIC THEORY OF THE ELECTRON* geht es Dirac um die Formulierung einer speziell relativistischen Wellengleichung des Electrons: *In order that this wave equation shall transform in a simple way under a Lorentz transformation, we try to arrange that it shall be rational and linear in  $p_1$ ,  $p_2$  and  $p_3$  as well as in  $p_0$ , and thus of the form  $(p_0 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta)\psi = 0$ .* Schmüser knüpft in seiner Vorlesung direkt daran an: *Eine relativistisch kovariante Differentialgleichung, die nur die erste Ableitung nach der Zeit enthält, muss auch von erster Ordnung in den Ortskoordinaten  $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  sein. Für die Wellengleichung eines freien Elektrons machte Dirac den Ansatz:*

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = -i\hbar c \left( \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) + \beta mc^2 \psi$$

Unter Berücksichtigung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung und der Form des Energie-Impuls-Operators wird die Gleichung nach  $t$  differenziert und die erste Ableitung wieder eingesetzt. Für beliebige ebene Wellen ergibt das genau dann die relativistische Energie-Impuls-Beziehung, wenn zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  die folgenden Relationen gelten:

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1, \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 0 \text{ für } j \neq k, \alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0$$

Um diese Relationen zu erfüllen, werden Matrizen mit komplexen Koeffizienten gesucht, die folgenden Bedingungen zu genügen haben: 1. Ebenso wie der Hamilton-Operator  $H$  sind die Matrizen  $\alpha_j$  und  $\beta$  hermitisch. 2. Ihre Quadrate sind gleich der Einheitsmatrix:  $\alpha_j^2 = \beta^2 = I$ . 3. Die Matrizen haben alle die Spur 0. Damit ergibt sich  $N = 4$  als kleinste Dimension der vier Matrizen. Die vierkomponentige Wellenfunktion  $\psi$  ist ein Spaltenvektor, der *Dirac-Spinor* genannt wird. Für ein Elektron im elmag. Feld sind in der Dirac-Gleichung die Potentiale  $\Phi, \vec{A}$  einzusetzen und deren verallgemeinerter Impulsoperator  $\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A} = -i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}$  zu berücksichtigen:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\vec{\alpha}\vec{P} + \beta mc^2 + q\Phi) \psi$$

Neben der Pauli-Gleichung für den Spin folgt daraus auch der  $g$ -Faktor zur Bestimmung des magnetischen Eigenmoments des Elektrons. Das ist natürlich naheliegend, da das Magnetfeld bekanntlich als relativistischer Effekt verstanden werden kann. Um die Dirac-Gleichung in den vier Koordinaten  $(t, x, y, z)$  symmetrisch darstellen zu können, werden die *Gamma*-Matrizen eingeführt:  $\gamma^0 = \beta, \gamma^j = \beta\alpha_j$ . Zu einem Vierervektor  $\gamma^\mu$  zusammengefasst, geben sie der Dirac-Gleichung eines Elektrons im elmag. Feld folgende Form:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = q\gamma^\mu A_\mu \psi(x)$$

Da die Dirac-Spinoren auch den Eigendrehimpuls des Elektrons beschreiben, wird endlich mein Verständnisproblem gelöst, wie denn ein ausdehnungsloses „Punktteilchen“ einen Drehimpuls haben könne. Der ist wie das magnetische Feld eine Folge der relativistischen Translationsinvarianz. Die Existenz der Positronen ist ebenfalls ein solcher Effekt. Das sieht man schon an der Wurzel der Energie-Impulsbeziehung:  $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Die Wellenfunktion des Positrons kann mittels Ladungs-Konjugations-Matrix aus der konjugiert komplexen Wellenfunktion des Elektrons gewonnen werden. Da die Positronen nach Feynman als in der Zeit rücklaufende Elektronen negativer Energie interpretiert werden können, behandelt Schmüser die Wellenfunktion des Positrons nicht weiter. Neben den Elektronenbewegungen in der kosmischen Höhenstrahlung oder den Hochenergiebeschleunigern, macht die Dirac-Gleichung auch die hyperfeinen Strukturen in den Atomspektren verständlich. Dazu hat mir Berit aus Berts Bücherstapeln herausgesucht: *Relativistic Transitions in the Hydrogenic Atoms* und *Atom Spectroscopy: Introduction to the Theory of Hyperfine Structure*. Selbst hat sie sich in Köhlers Artikel vertieft: *Gruppentheoretische Begründung der Dirac-Gleichung* und folgt der *Derivation of the Dirac Equation by Conformal Differential Geometry* von Santamato und De Martini.

Sie  $G$  eine Symmetriegruppe auf dem Vektorraum der physikalischen Zustände  $Z$ , dann gibt es stets eine hintereinander ausführbare bijektive Abbildung  $D(g)$  zwischen

den Gruppenelementen  $g, h$ , so dass:  $D(gh) = D(g) \circ D(h)$ . Eine solche Abbildung heißt auch Darstellung von  $G$  auf  $Z$ . Sei nun umgekehrt eine Gruppe  $G$  gegeben: Für welchen Vektorraum  $Z$  wird  $G$  zu einer Symmetrie? Das fragt sich der Gruppentheoretiker. Hinsichtlich der Dirac-Gleichung ist  $G$  die Lorentzgruppe, die in einen Boost und eine Rotation zerfällt und eine chirale Darstellung erlaubt. Physikalisch interessanter scheint mir die differentialgeometrische Begründung der Dirac-Gleichung zu sein; denn damit wird sie zu einer Folgerung der ART, so wie Sachs es bereits in *QUANTUM MECHANICS AND GRAVITY* ausgeführt hat: *the quantum theory appears as a linear approximation for a generally covariant field theory of the inertia of matter in general relativity, which originates in a unified field theory*. Da haben wir wieder den Unterschied zwischen Algebra und Geometrie, Idealismus und Realismus: *It is the realist philosophy that I believe is the one where the truth lies in science, and will flourish in 21st century physics*. Ich bin gespannt, wie weit ich Sachs werde folgen können in seiner Verbindung von Zeit und Raum durch Gruppentheorie und Differentialgeometrie: *The resulting irreducible representation of the Einstein group obeys the algebra of quaternions and their basis functions are spinors in a curved spacetime*. Bert wird mir auf die Sprünge helfen müssen! Ich freue mich schon darauf, im Zwillingsspaar den Bogen von der Begründung zur Anwendung zu spannen. Dann bliebe nur noch der Entstehungszusammenhang aufzuklären und – den wird Bert uns später nahebringen können.

13. November: Heute vor 143 Jahren wurde Helene Stöcker geboren. Sigusch widmet ihr mehrere Kapitel. Anlässlich ihres 60. Geburtstages 1929 erschien ein Sonderband mit ihren Reden und Artikeln *gegen Patriarchalismus, die herrschende Männermoral, die Heuchelei in allen sexuellen Dingen, gegen die Kriegstreiberei*. Was für eine Frau! Natürlich war sie ähnlichen Anfeindungen ausgesetzt wie der ein Jahr ältere Magnus Hirschfeld, darüberhinaus aber dem Hohn und Hass, den Drohungen und Verfolgungen, denen sich speziell die Frauenrechtlerinnen und Sexualreformerinnen zu erwehren hatten. Sie war *von einem starken Verlangen nach Wissen und Autonomie getragen, gegen alle Widerstände eine höhere Bildung zu erlangen*. Praktischen Mutterschutz betrieb sie bereits mit 16 Jahren: *Da ihre Mutter nach Geburt des einzigen Bruders lange krank war, nahm sie ihr die Pflege des Säuglings ab und betreute zugleich die jüngeren Schwestern*. Ihr theoretisches Studium begann sie 1896 als Gasthörerin der Berliner Universität. Entscheidend für sie wurde das Jahr 1905. Während Einstein sein *annus mirabilis* erlebte, gründete Stöcker den *Bund für Mutterschutz* und veröffentlichte ihr erstes Buch: *Die Liebe und die Frauen*. In der vom Bund herausgegebenen Zeitschrift *Die neue Generation* ging es nicht nur um den Mutterschutz in der Ehe, sondern vor allem um den Schutz der *Gefallenen* und der als *Mutterschutz* verachteten unehelichen Kinder. Zudem gab Stöcker die *Frauen-Rundschau* und den *Mutterschutz, Zeitschrift zur Reform der sexuellen Ethik* heraus. Selbst pflegte Helene bereits eine offene Partnerschaft oder erotische Freundschaft mit dem Rechtsanwalt und Publizisten Bruno Springer, wie sie erst Jahrzehnte später wieder möglich werden sollte: im Existentialismus und der Studentenbewegung. *Angesichts von Krieg und Völkermord erweiterte Stöcker 1914 ihren Kampf für die „freie Liebe“ und für eine emanzipatorische Sexualethik, überhaupt für Frauenrechte und den Kampf für*

*Frieden und Menschenrechte.* Wie auch Einstein stand Stöcker jahrelang in der Friedensbewegung in der ersten Reihe. Da kann ich Berit nur zustimmen bei ihrem Projekt zum Ursprung und Untergang der Welt. Sigusch fasst zusammen: *Viele ihrer Forderungen sind bei uns kulturell und insbesondere rechtlich erst in den letzten Jahrzehnten bruchstückhaft erfüllt worden: Gleichstellung des unehelichen Kindes mit dem ehelichen, Gleichstellung des weder staatlich noch kirchlich geschlossenen Liebesbundes mit der Ehe, wirtschaftliche Unabhängigkeit der Frau vom Mann, gleiche Bildungschancen für Mädchen wie Jungen, uneingeschränkter Zugang zur Geburtenregelung, insgesamt ein Verhältnis von Mann und Frau und eine „Kultur der Erotik“, die auf Selbstbestimmung, persönlicher Verantwortung und darauf beruht, dass beide Geschlechter Liebe und Beruf leben können.* Sagenhaft! Und sinnlich erfahrbar gemacht hat Helene ihre Forderungen 1922 in dem Roman *Liebe*. Den werde ich mir nach Sonjas *Nihilistin* vornehmen. Ebenso wie Einstein musste Stöcker Deutschland 1933 verlassen. Sie starb zehn Jahre später in New York. Ob sie dort mit Hannah Arendt zusammengetroffen war? Die hatte ebenfalls Philosophie studiert, blieb dann aber dabei.